

Control de estructura variable y perturbaciones singulares: Caso de estudio generador síncrono

Adolfo Soto-Cota, Leonid M. Fridman

Resumen— La máquina síncrona tiene un doble escalamiento de tiempo en sus dinámicas. Es por eso que para modelado y control de estas máquinas son muy usados los métodos de perturbaciones singulares. En este trabajo se analiza la posibilidad de usar un control por modos deslizantes. Los conceptos clásicos de perturbaciones singulares son revisados y complementados para ser usados en un control discontinuo. Los resultados obtenidos se usan en el diseño de un control estabilizante para un generador síncrono.

Palabras clave— Modos deslizantes, perturbaciones singulares, control no lineal.

I. INTRODUCCIÓN

La simplificación de plantas es una herramienta clásica en sistemas eléctricos de potencia y la forma más común de implementarla es a través de perturbaciones singulares. (ver Sauer y Kokotovic 1998, Sauer y Pai 1998, Kokotovic *et al.* 1986, Krause 1986). Por otra parte, un eficiente y práctico enfoque de control; muy útil cuando se trata de controlar sistemas no lineales es el control de estructura variable con modos deslizantes (Utkin 1992). Sin embargo, aplicar un control discontinuo en sistemas singularmente perturbados acarrea algunos inconvenientes. Los métodos clásicos de perturbaciones singulares (ver Vasil'eva *et al.* 1995, y Kokotovic *et al.* 1986) son basados en separación de espectro y consecuentemente necesitan suavidad en los argumentos y control. Por esta razón, los métodos clásicos de perturbaciones singulares no son válidos para sistemas singularmente perturbados con control relevado (SSPCR).

Los métodos de descomposición para SSPCR fueron desarrollados por Heck 1991, Su 1999, Fridman 2002a,b, Innocenti *et al.* 2003. Este trabajo discute las ventajas y posibilidades de usar un control discontinuo por modos deslizantes en un sistema no lineal SSPCR que describe la dinámica de un generador síncrono. Para esto se diseña un control discontinuo a dos pasos (CDDP):

I Eliminar la dinámica del estator por medio de perturbaciones singulares y obtener el sistema reducido de sexto orden que describe sólo la dinámica mecánica y la dinámica del rotor.

II Diseñar un control de excitación por modos deslizantes usando la técnica de control por bloques (Loukianov 1998).

Para justificar el procedimiento CDDP, Primero se demuestra que la dinámica rápida no afecta el punto de entrada en el dominio de modos deslizantes y la dinámica lenta permanece en la capa frontera. Entonces las condiciones de estabilidad asintótica uniforme para el SSPCP original, son encontradas. Los resultados obtenidos son usados para diseñar un control por modos deslizantes para velocidad angular y voltaje del generador.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se introduce las ecuaciones básicas para el generador síncrono. En la sección 3 los conceptos de perturbaciones singulares con modos deslizantes se justifican. En la sección 4 se diseña el controlador para el generador síncrono. Los resultados de las simulaciones se muestran en la sección 5.

II. MODELO DEL GENERADOR SÍNCRONO

A. Ecuaciones Básicas

El modelado matemático del generador síncrono está basado en las ecuaciones básicas de equilibrio eléctrico y mecánico. Las ecuaciones de equilibrio mecánico son

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_b \quad (1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_b}{2H} (T_m - T_e) \quad (2)$$

donde δ es el ángulo de potencia (rad.), ω es la velocidad angular (rad./seg.), ω_b es la velocidad síncrona (rad./seg.), H es la constante de inercia (seg.), T_m es el par mecánico (p.u.), y T_e el par electromecánico (p.u.). Por otra parte las ecuaciones de equilibrio eléctrico, afectadas por la transformación de Park (Park 1929), son

$$V = R i + \omega G \varphi + \frac{d\varphi}{dt} \quad (3)$$

$$\varphi = L i \quad (4)$$

donde $\bar{t} = \omega_b t$, ω_b es la velocidad angular base, t es el tiempo en segundos, \bar{t} es el tiempo en p.u.,

$$i = [i_d, i_q, i_f, i_g, i_{kd}, i_{kq}]^T, V = [V_d, V_q, V_f, 0, 0, 0]^T,$$

Manuscrito recibido el 21 de junio del 2005. Este trabajo es respaldado por impulso, revista de electrónica, eléctrica y sistemas computacionales.

Adolfo Soto-Cota esta en el departamento de eléctrica y electrónica del Instituto Tecnológico de Sonora de Febrero 818 sur, Cd. Obregón, Sonora México (e-mail: adolfosoto@itson.mx).

Leonid M. Fridman esta con la Universidad Nacional Autónoma de México, DEP-FI, UNAM, Edificio "A", Ciudad Universitaria, A. P. 70-256, C.P. 04510, México, D.F., México (e-mail: fridman@verona.fi-p.unam.mx, Phone: 52 55 56223014).

$$\varphi = [\varphi_d, \varphi_q, \varphi_f, \varphi_g, \varphi_{kd}, \varphi_{kq}]^T \quad R = \begin{bmatrix} -r_s & & & & & \\ & -r_s & & & & \\ & & r_f & & & \\ & & & r_g & & \\ & & & & r_{kd} & \\ & & & & & r_{kq} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -L_d & 0 & L_{md} & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & -L_q & 0 & L_{mq} & 0 & L_{mq} \\ -L_{md} & 0 & L_f & 0 & L_{md} & 0 \\ 0 & -L_{mq} & 0 & L_g & 0 & L_{mq} \\ -L_{md} & 0 & L_{md} & 0 & L_{kd} & 0 \\ 0 & -L_{mq} & 0 & L_{mq} & 0 & L_{kq} \end{bmatrix}$$

V es voltaje, i es corriente, φ es entrelazamiento de flujo, r es resistencia, L es inductancia, y los sufijos son: s estator, d eje directo (circuito), q eje en cuadratura (circuito), f circuito de campo, g circuito de campo cuadratura, kd compensador eje directo, kq compensador eje cuadratura, md eje directo magnetizante, mq eje cuadratura magnetizante.

La ecuación para el par electromecánico en términos de corrientes y flujos es

$$T_e = \varphi_d i_q - \varphi_q i_d \quad (5)$$

B. Modelado en escalamiento de tiempo

Para simplificar el modelo transformaremos el sistema a una forma singularmente perturbada. Con este propósito se busca un parámetro "parásito" que multiplique la dinámica del estator. De (1)-(6) se obtiene

$$\frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_d = \frac{\omega}{\omega_b} \varphi_q + r_s i_d + V_d \quad (6)$$

$$\frac{1}{\omega_b} \dot{\varphi}_q = -\frac{\omega}{\omega_b} \varphi_d + r_s i_q + V_q \quad (7)$$

C. Modelo Completo

De (1)-(7), se obtiene el siguiente modelo del generador síncrono de 8vo orden:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{z}, T_m) \\ F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} V_f \quad (8)$$

$$\mu \dot{\mathbf{z}} = F_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{z}) \quad (9)$$

donde $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{x}_2 = (x_4, x_5, x_6)^T$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$,
 $x_1 = \delta$, $x_2 = \omega$, $x_3 = \varphi_f$, $x_4 = \varphi_g$, $x_5 = \varphi_{kd}$,
 $x_6 = \varphi_{kq}$ $z_1 = \varphi_d$, $z_2 = \varphi_q$, $\mu = \frac{1}{\omega_b}$

$$F_1 = \begin{bmatrix} x_2 - \omega_s \\ d_m T_m - (a_{21} x_3 z_2 + a_{22} x_4 z_1 + a_{23} x_5 z_2 + a_{24} x_6 z_1 + a_{25} z_1 z_2) \\ a_{31} x_3 + a_{32} x_5 + a_{33} z_1 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} b_{11} x_4 + b_{12} x_6 + b_{13} z_2 \\ b_{21} x_3 + b_{22} x_5 + b_{23} z_1 \\ b_{31} x_4 + b_{32} x_6 + b_{33} z_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = 0,$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} c_{11} x_2 x_4 + c_{12} x_2 x_6 + c_{13} x_2 z_2 + c_{14} z_1 + c_{15} \sin x_1 \\ c_{21} x_2 x_3 + c_{22} x_2 x_5 + c_{23} x_2 z_1 + c_{24} z_2 + c_{25} \cos x_1 \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes de (8)-(9) dependen de los parámetros.

III. ENFOQUE PERTURBACION SINGULAR

A. Modelo Singularmente Perturbado

Este trabajo trata sobre perturbaciones singulares de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z, \mu, u), \quad x(0) = x_0 \quad (10)$$

$$\mu \frac{dz}{dt} = g(x, z, \mu), \quad z(0) = z_0 \quad (11)$$

donde $x \in R^n$, $z \in R^m$, $u \in R$, $\mu \in R$; f y g son funciones suaves en sus argumentos y lineales en z y u , $\mu > 0$ es un parámetro pequeño, y u es

$$|u| \leq u_0 \text{ con } u_0 > 0. \quad (12)$$

B. Diseño del Control

El diseño del control consiste en dos pasos.

Paso 1. Con $\mu = 0$ se hace instantánea la dinámica rápida (11)

$$0 = g(x, z, 0). \quad (13)$$

Se considera una solución suave aislada de z para (13)

$$\bar{z} = h(x) \quad (14)$$

donde \bar{z} representa el estado quasi-estable. Sustituyendo (14) en (10) se obtiene el modelo de orden reducido (MOR)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, h(\bar{x}), 0, u) \quad (15)$$

donde $\bar{x}(t)$ define la solución de (15) para cierto control $u(\bar{x})$. Tomando en cuenta las características de (8) y (9), se asume que (14) es lineal con respecto a z y u , y la solución (14) existe. Consecuentemente, el MOR (15) es lineal en u .

Paso 2. Diseñar una superficie de deslizamiento no lineal $s(\bar{x}) = 0$, $s \in R$ para (15), tal que la solución de la ecuación

$$\frac{ds}{dt} = \bar{G} f(\bar{x}, h(\bar{x}), 0, u_{eq}) = 0, \quad \bar{G} = \left\{ \frac{ds}{d\bar{x}} \right\}$$

con respecto al control equivalente $u_{eq}(\bar{x})$ (Utkin 1992), existe, y la ecuación de modos deslizantes (EMD)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x}, h(\bar{x}), 0, u_{eq}(\bar{x})) \quad (16)$$

$$s(\bar{x}) = 0 \quad (17)$$

tenga las propiedades deseadas. Segundo, se elige un control discontinuo

$$u(\bar{x}) = \begin{cases} u^+(\bar{x}) & \text{if } s(\bar{x}) > 0, \quad |u^+(\bar{x})| \leq u_0, \\ u^-(\bar{x}) & \text{if } s(\bar{x}) < 0, \quad |u^-(\bar{x})| \leq u_0 \end{cases} \quad (18)$$

tal que la superficie de modos deslizantes (24) sea atractiva.

Note que (8)-(9) es un caso particular de (10)-(11), cuando f y g dependen de z y u linealmente, entonces existe una solución en sentido de Fillipov al menos para pequeño t (ver por ejemplo Utkin 1992). Además de (17) uno de los vectores de \bar{x} puede ser expresado en función de los otros ($n-1$).

Para justificar el control propuesto (CDDP), primero se analizan el comportamiento del sistema SSPCP original cuando el vector de estados cruza la superficie de deslizamiento y después durante la entrada en el dominio de modos deslizantes (subsección 3.3). Por último se exponen las condiciones de estabilidad para SSPCR (subsección 3.4).

C. Análisis de SSPCR cruzando la superficie de deslizamiento

En esta subsección se estudiará el comportamiento del SSPCP original (10)-(11) y (18) fuera de la superficie de deslizamiento. Si una solución de SSPCR no cruza la superficie de deslizamiento (17) puede ser analizada por métodos clásicos de perturbaciones singulares (ver Vasil'eva *et al.* 1995, Kokotovic *et al.* 1986). Por otra parte, las características específicas del generador síncrono SSPCR es que las ecuaciones de las variables lentas dependen del control relevado (18), por tanto, después de un número finito de switcheos, la trayectoria de SSPCR entrará en la superficie de modos deslizantes. Se probará que en caso de switcheos finitos se puede usar el sistema de orden reducido para describir el SSPCR.

Denote los dominios de definición para z y x como Z y X . La superficie de discontinuidad $s(x) = 0$ divide el dominio X en X^- para $s < 0$ y X^+ para $s > 0$; y se define la estructura

$$\begin{aligned} f^+(x, z, \mu) &= f(x, z, \mu, u^+(x)) \quad \text{para } s \geq 0 \\ f^-(x, z, \mu) &= f(x, z, \mu, u^-(x)) \quad \text{para } s \leq 0, \text{ con} \\ f^+ &\in C^2[\bar{X}^+ \times [0, \mu_0]], \quad f^- \in C^2[\bar{X}^- \times [0, \mu_0]]. \end{aligned}$$

1) Sistema en el dominio $s < 0$.

Denote

$$\frac{ds^-}{dt}(x, z, \mu) = Gf^-(x, z, \mu), \quad \frac{ds^+}{dt}(x, z, \mu) = Gf^+(x, z, \mu).$$

Suponga que $x_0 \in X^-$, $z_0 \in Z$. Es natural asumir que para el sistema original sistema (10)-(11) y (18) las siguientes condiciones del teorema de Tikhonov (ver, por ejemplo, Vasil'eva *et al.* 1995) se cumplen:

[a1] La función $\bar{z} = h(\bar{x})$ es una solución aislada de $0 = g(x, z, 0)$ para toda $x \in X$.

[a2] El problema de Cauchy para la dinámica lenta

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f^-(\bar{x}^-, h(\bar{x}^-), 0), \quad \bar{x}^-(0) = x_0 \quad (19)$$

tiene solución única $\bar{x}^-(t)$ en $[0, \bar{t}_s]$, donde \bar{t}_s es el punto de switcheo i.e. la raíz más pequeña de la ecuación $s(\bar{x}^-(\bar{t}_s)) = 0$.

[a3] El punto de equilibrio $\Pi z = 0$ del sistema

$$\frac{d(\Pi z)}{d\tau} = g(\bar{x}, \Pi z + h(\bar{x}), 0)$$

donde $\Pi z = z - h(\bar{x})$, $\tau = t/\mu$, es asintóticamente estable, además para toda $x \in X$

$$\text{Re Spec } \frac{\partial g}{\partial \Pi z}(\bar{x}, h(\bar{x}), 0) < -\alpha < 0, \quad \alpha > 0.$$

[a4] La trayectoria del sistema reducido (19) cruza la superficie de deslizamiento $s(x) = 0$, no tangencialmente, i.e.

$$\frac{ds^-}{dt} = Gf^-(\bar{x}^-(\bar{t}_s), h(\bar{x}^-(\bar{t}_s)), 0) > 0.$$

Nota1. La función g depende de z linealmente. Esto implica que cada valor inicial de (11) pertenece al dominio de atracción del punto $\Pi z = 0$. Ahora del teorema de Vasil'eva (Vasil'eva *et al.* 1995) y el teorema de la función implícita dice que para μ pequeña existe un tiempo $t = t_s(\mu)$ tal que $s(x(t_s(\mu), \mu)) = 0$ y para toda $\mu \in [0, \mu_0]$

$$\frac{ds^-}{dt} = Gf^-(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu), \mu) > 0, \quad G = \left\{ \frac{ds}{dx} \right\}$$

Se consideran dos alternativas para el comportamiento del SSPCR:

- la solución del sistema SSPCP original entra en el dominio $X^+ \times Z$;
- la solución del sistema original SSPCR entra al dominio de modos deslizantes.

2) Entrada en el dominio $s > 0$

De [a4] y el método boundary layer (Vasil'eva *et al.* 1995), sigue que la solución de SSPCR alcanzará la superficie de deslizamiento $s(x(t_s(\mu), \mu)) = 0$ en el punto de switcheo

$$(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu)) = (\bar{x}(\bar{t}_s) + O(\mu), h(\bar{x}(\bar{t}_s)) + O(\mu)).$$

Esto significa que el punto $(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu))$ no pertenece al dominio de modos deslizantes, y la solución de (10)-(11) y (18) entra en el dominio $X^+ \times Z$. Se considera la coordenada del punto de switcheo $(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu))$

como la condición inicial de SSPCR en el dominio $X^+ \times Z$ y suponga que SSPCR en el dominio $X^+ \times Z$, las siguientes condiciones se satisfacen:

$$[b1] \quad \frac{ds^+}{dt} = Gf^+(\bar{x}^-(\bar{t}_s), h(\bar{x}^-(\bar{t}_s)), 0) > 0$$

entonces por el teorema de Tikhonov, para μ pequeña

$$\frac{ds^+}{dt} = Gf^+(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu), \mu) > 0$$

[b2] Suponga que el problema de Cauchy

$$\frac{d\bar{x}^+}{dt} = f^+(\bar{x}^+, h(\bar{x}^+), 0), \quad \bar{x}^+(\bar{t}_s) = \bar{x}^-(\bar{t}_s)$$

tiene solución única en $[\bar{t}_s, T]$.

El siguiente lema es verdadero (Fridman 2002b):

A. Lema 1. *Suponga que el sistema original (10)-(11) y (18) satisface la condición [a1]-[a4] y [b1]-[b2]. Entonces existe una pequeña $\mu_0 > 0$ tal que para toda*

$\mu \in [0, \mu_0]$ existe una única solución $(x(t, \mu), z(t, \mu))$ del problema de Cauchy (10)-(11) en $[0, T]$, y

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t) = \begin{cases} \bar{x}^-(t) & \text{para } t \in [0, \bar{t}_s] \\ \bar{x}^+(t) & \text{para } t \in [\bar{t}_s, T] \end{cases},$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = h(\bar{x}(t)) \text{ para } t \in (0, T].$$

Nota 2. También se puede probar que es posible usar las ecuaciones de la dinámica lenta para analizar el sistema (10)-(11) y (18) en el caso cuando la solución deja el dominio $X^+ \times Z$ y entra al dominio $X^- \times Z$.

3.3.3 Transición al dominio de modos deslizantes

El comportamiento del SSPCP original (10)-(11) y (18) en el dominio de modos deslizantes se describe. Denote como

$$S_0 = \left\{ x : \frac{ds^-}{dt}(\bar{x}, h(\bar{x}), 0) > 0, \frac{ds^+}{dt}(\bar{x}, h(\bar{x}), 0) < 0 \right\},$$

$$S_\mu = \left\{ (x, z, \mu) : \frac{ds^-}{dt}(x, z, \mu) > 0, \frac{ds^+}{dt}(x, z, \mu) < 0 \right\}$$

Los dominios de modos deslizantes para (15) y (10)-(11) respectivamente. Suponga que el control permite la existencia de modos deslizantes (Utkin 1992):

$$[c1] \quad \frac{ds^-}{dt}(\bar{x}^-(\bar{t}_s), h(\bar{x}^-(\bar{t}_s)), 0) > 0,$$

$$\frac{ds^+}{dt}(\bar{x}^-(\bar{t}_s), h(\bar{x}^-(\bar{t}_s)), 0) < 0$$

Por el teorema de Tikhonov, sigue que para μ pequeña

$$\frac{ds^-}{dt} = Gf^-(x(t_s(\mu)), z(t_s(\mu)), \mu) > 0,$$

$$\frac{ds^+}{dt} = Gf^+(x(t_s(\mu)), z(t_s(\mu)), \mu) < 0$$

lo que significa que una solución del sistema original (10)-(11) y (18) entra en S_μ sin toque tangencial. Por esto se considera a $(x(t_s(\mu), \mu), z(t_s(\mu), \mu))$ como la condición inicial de SSPCR en el dominio S_μ . Así, una solución del problema de Cauchy (10)-(11) con (18) en S_μ es descrita por (Utkin 1992):

$$\frac{dx^*}{dt} = f(x^*, z^*, \mu, u_{eq}(x^*, z^*, \mu)), \quad \mu \frac{dz^*}{dt} = g(x^*, z^*, \mu) \quad (20)$$

$$x^*(t_s(\mu), \mu) = x(t_s(\mu), \mu), \quad z^*(t_s(\mu), \mu) = z(t_s(\mu), \mu), \quad s(x^*) = 0.$$

donde $t \in [t_0(\mu), T]$, $x^* \in R^{n-1}$, $z^* \in R^m$, $u \in R$, $\mu \in [0, \mu_0]$, y $u_{eq}(x^*, z^*, \mu)$ es el control equivalente calculado como una solución de

$$\frac{ds}{dt} = Gf(x^*, z^*, \mu, u_{eq}) = 0, \quad s(x^*) = 0. \quad (21)$$

Similarmente (como en subsección 3.3.2) se supone que para el sistema (20)-(21) las siguientes condiciones del teorema de Tikhonov se cumplen:

[c2] La ecuación de modos deslizantes reducida por ($\mu = 0$)

$$\frac{d\bar{x}^*}{dt} = f(\bar{x}^*, h(\bar{x}^*), 0, \bar{u}_{eq}(\bar{x}^*)), \quad \bar{x}^*(\bar{t}_s) = x^*$$

con $\bar{u}_{eq}(\bar{x}^*) = u_{eq}(\bar{x}^*, h(\bar{x}^*), 0)$ tiene solución única $\bar{x}^*(t)$

en $[\bar{t}_s, T]$, y $\bar{x}^*(t) \in S_0$ para todo $t \in [\bar{t}_s, T]$.

El siguiente lema es verdadero (Fridman 2002b):

Lema 2. *Suponga que el SSPCP original (10)-(11) y (18) satisface las condiciones [a1]-[a4] y [c1]-[c2]. Entonces existe pequeña $\mu_0 > 0$ tal que para toda $\mu \in [0, \mu_0]$ hay una solución única $(x(t, \mu), z(t, \mu))$ de (10)-(11) y (18) en $[0, T]$ y:*

$$1) \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{eq}(x(t, \mu), z(t, \mu), \mu) = \bar{u}_{eq}(\bar{x}^*(t)) \text{ para } t \in [\bar{t}_s, T],$$

$$2) \lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \bar{x}(t) = \begin{cases} \bar{x}^-(t) & \text{para } t \in [0, \bar{t}_s] \\ \bar{x}^*(t) & \text{para } t \in [\bar{t}_s, T] \end{cases},$$

$$3) \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = h(\bar{x}(t)) \text{ para } t \in (0, T].$$

Nota 3. Si una solución de (10)-(11) y (18) deja los modos deslizantes esto no afectará la aproximación cero de las ecuaciones dinámica, porque la variedad integral lenta es continua (Fridman 2002b).

D Análisis de estabilidad

Considérese el caso cuando el SSPCP original tiene un equilibrio en S_μ . Resolviendo (18) para $u_{eq}^*(x(t, \mu), z(t, \mu))$ y sustituyendo en (10), se obtiene el sistema algebraico-diferencial suave (20) el cual describe la dinámica de modos deslizantes. De la ecuación (17), tomando $G \neq 0$, se puede expresar una coordenada de x como función de las otras $(n-1)$ coordenadas. Entonces, la dinámica de modos deslizantes es gobernada por el sistema de orden $(n+m-1)$:

$$\frac{dx^\otimes}{dt} = f^\otimes(x^\otimes, z^\otimes, \mu), \quad \mu \frac{dz^\otimes}{dt} = g^\otimes(x^\otimes, z^\otimes, \mu) \quad (22)$$

donde el vector $x^\otimes \in R^{n-1}$ consiste de $n-1$ coordenadas independientes de x , $z^\otimes = z$, g^\otimes and $f^\otimes \in R^{n-1}$ son los valores de g y el correspondiente componente de f en $u = u_{eq}(x^\otimes, z^\otimes, \mu)$. En el caso del generador síncrono, $g^\otimes(\bar{x}^\otimes, h^\otimes(\bar{x}^\otimes), 0) = 0$ tiene solución única $\bar{z}^\otimes = h^\otimes(\bar{x}^\otimes)$, consecuentemente la dinámica rápida en (22) es descrita por

$$\frac{dx^\otimes}{dt} = \bar{f}^\otimes(\bar{x}^\otimes) = f^\otimes(\bar{x}^\otimes, h^\otimes(\bar{x}^\otimes), 0), \quad 0 = g^\otimes(\bar{x}^\otimes, h^\otimes(\bar{x}^\otimes), 0) \quad (23)$$

Denote x_{eq}^\otimes como el punto de equilibrio de (23). Entonces del teorema de Klimushchev-Krasovskii (Klimushchev y Krasovskii 1962) sigue que el punto de equilibrio del sistema (22) es uniformemente asintóticamente estable para $\mu \in [0, \mu_0]$, si las matrices en (23):

$$[ss] \quad \frac{\partial \bar{f}^\otimes}{\partial x^\otimes}(x_{eq}^\otimes, h^\otimes(x_{eq}^\otimes), 0) \text{ y}$$

[sf] $\frac{\partial g^{\otimes}}{\partial z^{\otimes}}(x_{eq}^{\otimes}, h^{\otimes}(x_{eq}^{\otimes}))0$, son Hurwitz.

Es por esto que se concluye que para verificar el control propuesto CDDP es suficiente con verificar las condiciones vistas en subsecciones 3.2 y 3.3.

IV. CONTROL DEL GENERADOR

En esta sección se obtendrá un modelo reducido y un control discontinuo para el generador síncrono.

A. Modelo reducido de la máquina síncrona

La dinámica rápida (8)-(9) puede ser eliminada con $\mu = 0$. Se obtiene el siguiente modelo de 6to orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m, h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\ \bar{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} V_f \quad (24)$$

donde

$$\bar{F}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - \omega_s \\ d_m T_m - [(a_{22}x_4 + a_{24}x_6) \cdot h_1(\cdot) + (a_{23}x_3 + a_{25}x_5) \cdot h_2(\cdot) + a_{25}h_1(\cdot)h_2(\cdot)] \\ a_{41}x_3 + a_{42}x_4 + a_{43}x_5 + a_{44}x_6 + a_{45}\sin x_1 + a_{46}\cos x_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}_2 = \begin{bmatrix} b_{11}x_4 + b_{12}x_6 + b_{13}h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ b_{21}x_3 + b_{22}x_5 + b_{23}h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ b_{31}x_4 + b_{32}x_6 + b_{33}h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Los coeficientes de (24) dependen de los parámetros de la planta. Las condiciones [a2] en (24) se cumplen.

B. Control de velocidad angular

El primer subsistema de (24) tiene forma No Lineal Controlable a Bloques en tres bloques. Por esto se usa la técnica de control a bloques (Loukianov 1998). Para satisfacer estabilidad de ángulo, se define el error de control como

$$\varsigma_2 = x_2 - \omega_b \quad (25)$$

La derivada de (25) alrededor de la trayectoria de (24) es

$$\dot{\varsigma}_2 = f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m) + b_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)x_3 \quad (26)$$

donde

$$f_2 = d_m T_m - (a_{22}x_4 h_1(\cdot) + a_{23}x_5 h_2(\cdot) + a_{24}x_6 h_1(\cdot) + a_{25}h_1(\cdot)h_2(\cdot)),$$

$b_2 = a_{21}h_2(\cdot)$, y $b_2(t)$ es una función positiva del tiempo. Para introducir la dinámica deseada se propone

$$x_3 = -b_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^{-1} [f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m) + k_0 \varsigma_2 - s_{\omega}], \quad k_0 > 0 \quad (27)$$

Con (27) la superficie de deslizamiento se define como

$$s_{\omega}(x) = b_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)x_3 + f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m) + k_0(x_2 - \omega_b) = 0 \quad (28)$$

C. Análisis de estabilidad

1) Estabilidad en modos deslizantes

Con el control relevado propuesto

$$V_f = -u_0 \text{sign}(s_{\omega}), \quad u_0 > 0. \quad (29)$$

Se puede ver que bajo la restricción

$$u_0 \geq |V_{feq}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m)|, \quad V_{feq} = b_s^{-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)f_s(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m),$$

las condiciones [a4], [b1] o [c1] se satisfacen. Esto significa que el vector de estados converge a (28) en tiempo finito t_s , y después permanece en modos deslizantes ocurre.

2) Estabilidad de la dinámica de modos deslizantes

Una vez que ocurren modos deslizantes, la dinámica es gobernada por el sistema reducido de 5to orden:

$$\dot{x}_1 = \varsigma_2; \quad \dot{\varsigma}_2 = -k_0 \varsigma_2 \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \bar{F}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \quad (31)$$

donde el sistema lineal (30) describe la dinámica mecánica, con valores propios $-k_0$, mientras que (31) representa la dinámica de los flujos del rotor. El subsistema (30) es estable, esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} \varsigma_2(t) = 0$. Mientras que \mathbf{x}_2 es referido como la *dinámica zero*.

3) Estabilidad de la dinámica rápida

La dinámica rápida reducida en (23) no depende de u

$$\Pi z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ h_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

La derivada de la dinámica rápida es

$$\mu \frac{d(\Pi z)}{dt} = A_z(\mathbf{x}_1)\Pi z + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Pi z + h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) + B_1 V_f \\ F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Pi z + h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde $A_z(\mathbf{x}_1) = A_R$, y el control toma valores u_0 o $-u_0$ si $s_{\omega} \neq 0$, e iguales a $V_{feq}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T_m)$ en $s_{\omega} = 0$. Haciendo $\mu = 0$ se congelan las variables \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 en $t = 0$ y se reduce (33) al sistema

$$\frac{d(\Pi z)}{d\tau} = A_z(\mathbf{x}_{1_0})\Pi z, \quad \mathbf{x}_{1_0} = \mathbf{x}_1(0).$$

la matriz $A_z(\mathbf{x}_{1_0})$ es Hurwitz, así $\Pi z = 0$ y a las condiciones [a2] y [sf] en este caso se cumplen.

V. RESULTADOS DE LA SIMULACION

El desempeño del control propuesto fue analizado en un modelo de alto orden de un generador síncrono conectado a un bus infinito. Fig.1.

Los parámetros de la máquina síncrona y la red externa en p.u. son (Kundur 1994):

$$T_{do}^i = 8.0 \text{ seg}, \quad T_{qo}^i = 1.0 \text{ seg}, \quad T_{do}'' = 0.03 \text{ seg}, \quad T_{qo}'' = 0.07 \text{ seg}$$

$$L_d = 1.81, \quad L_d' = 0.3, \quad L_d'' = 0.23, \quad L_q = 1.76, \quad L_q' = 0.6,$$

$$L_{ext} = 0.1, \quad R_{ext} = 0.001.$$

De esto, se obtienen los parámetros del modelo (15)-(16) y (30). La ganancia del controlador fue ajustada a $k_0 = 10$. Los valores propios de (31) son $\lambda_4 = -38.77$, $\lambda_5 = -0.5024$ y $\lambda_6 = -27.04$. Las figuras 2-4 muestran resultados sobre un corto circuito trifásico (150 mseg.) simulado en las terminales del transformador.

Las figuras revelan algunos aspectos relevantes:

- 1 Las variables de estados rápidamente alcanzan una condición de estado estable ante pequeñas y grandes perturbaciones, mostrando estabilidad de lazo cerrado.
- 2 El voltaje en terminales recobra su valor en estado estable después de liberar el corto circuito.

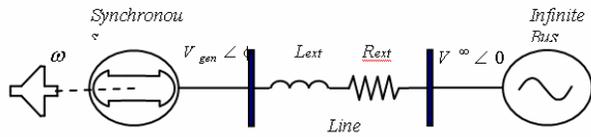


Fig. 1. Máquina bus infinito.

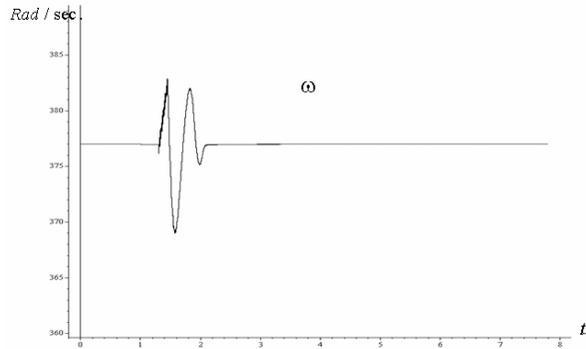


Fig. 2. Velocidad angular afectada por un corto circuito de 0.15 seg.

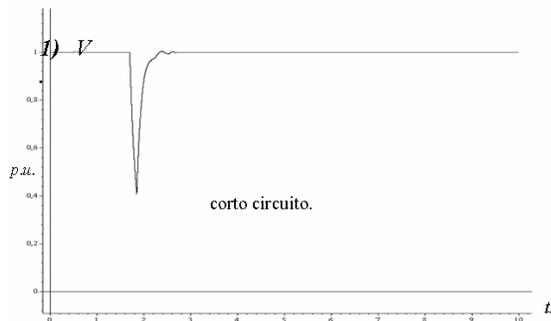


Fig. 3. Voltaje del generador afectado por un corto circuito de 0.15 seg.

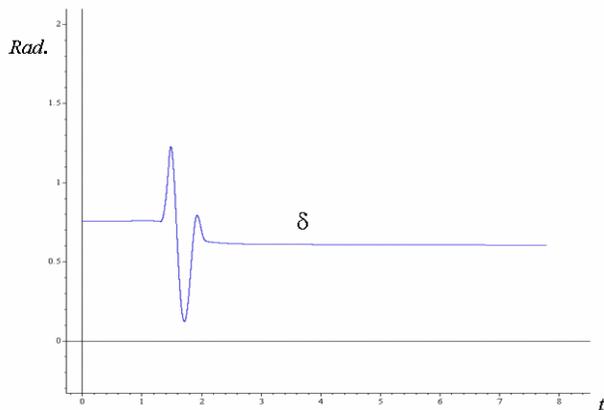


Fig. 4. Ángulo de carga afectado por un corto circuito de 0.15 seg.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo la posibilidad de aplicar un control discontinuo por modos deslizantes en un sistema no lineal reducido por perturbaciones singulares SSPCR es analizado. Para SSPCR que describen la dinámica de un generador síncrono con la dinámica lenta dependiente de control. Para tales sistemas se propone el control a dos pasos (CDDP): primero el escalamiente natural de tiempos de las dinámicas de la máquina síncrona es utilizado para obtener un modelo de orden reducido, para después diseñar un control estabilizante por modos deslizantes garantizando el comportamiento deseado del generador. La efectividad del algoritmo de control propuesto es ilustrada en simulaciones con parámetros reales del generador.

REFERENCIAS

- [1] FRIDMAN, L.M., 2002a, Singularly Perturbed Analysis of Chattering in Relay Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**, No. 12 2079-2084.
- [2] FRIDMAN, L.M., 2002b, Slow periodic motions with internal sliding modes in variable structure systems. *International Journal of Control*, **75** No. 7, 524-537.
- [3] HECK, B.S., 1991, Sliding mode control for singularly perturbed system. *International Journal of Control*, **53**, 985-1001.
- [4] INNOCENTI, M, GRECO, L., and POLLINI, L., 2003, Sliding mode control for two-time scale systems: stability issues. *Automatica*, **39**(2),273-280.
- [5] KHALIL, H.K., 1996, *Nonlinear systems* (New Jersey: Prentice Hall).
- [6] KLIMUSHCHEV, A.I., and KRASOVSKII, N.N., 1962, Uniform asymptotic stability of systems of differential equations with a small parameter in the derivative terms. *J. Appl. Math. Mech.*, **25**, 1011-1025.
- [7] KOKOTOVIC, P.V., KHALIL, H.K., and O'REILLY, J., 1986, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design* (London: Academic Press).
- [8] KRAUSE, P.C., 1986, *Analysis of Electric Machinery* (New York: McGraw Hill).
- [9] KUNDUR, P., 1994, *Power System Stability and Control* (Toronto: McGraw Hill).
- [10] LOUKIANOV, A.G., 1998, Nonlinear Block Control with Sliding Mode. *Automation and Remote Control*, **59** (7),916-933.
- [11] PARK, R.H, 1929, Two-reaction Theory of Synchronous Machines – Generalized Method of Analysis – Part I. *AIEE Trans.*, **48**, pp. 716-727, 1929.
- [12] SAUER, P.W., and PAI, M.A., 1998, *Power system dynamics and stability* (New Jersey: Prentice Hall).
- [13] SU, W.-C., 1999, Sliding surface design for singularly perturbed system. *International Journal of control*, **72**, 990-995.
- [14] UTKIN, V.I., 1992, *Sliding Mode in Control and Optimization* (London: Springer Verlag).
- [15] VASIL'EVA, A.B., BUTOZOV, V.F., and KALACHEV, L.V., 1995, *The boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. (Philadelphia: SIAM).