

**ISSN 1870-9532**

**Diciembre 2008  
Volumen 5  
Número 2**

# **RIEE & C**

---

---

**Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación**

Revista publicada por el Departamento  
de Ingeniería Eléctrica y Electrónica del  
Instituto Tecnológico de Sonora



# RIEE&C

Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación

## **Editor en jefe:**

José Antonio Beristáin Jiménez

## **Grupo editor ejecutivo:**

José Manuel Campoy Salguero

Rafael León Velázquez

Javier Pérez Ramírez

Juan Carlos Murrieta Lee

Manuel Domitsu Kono

Griselda González Díaz Conti

## **Editores asociados:**

Adolfo Espinoza Ruiz

Adolfo Soto Cota

Andrés Othón Pizarro Lerma

Armando Ambrosio López

Armando García Berumen

Eduardo Romero Aguirre

Enrique Aragón Millanes

Erica Ruiz Ibarra

Gabriel Nuñez Román

Héctor Hernández López

Ismael Murillo Verduzco

Joaquín Cortéz González

Juan José Padilla Ybarra

Moisés Rodríguez Echevarría

## **Diseño de portada:**

Jessica Beltrán Márquez

RIEE&C, Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación. Editor responsable: José Antonio Beristáin Jiménez. Publicación semestral editada por el Departamento de Eléctrica y Electrónica del Instituto Tecnológico de Sonora. Dirección: Ave. Antonio Caso s/n Col. Villa ITSON, C.P. 85130, Ciudad Obregón, Sonora, México, e-mail: [rieecandc@itson.mx](mailto:rieecandc@itson.mx), <http://www.itson.mx/rieecandc>.

Esta edición fue completada en Diciembre de 2008 y consiste en un tiraje de 200 ejemplares.

# An Efficient Architecture for Detection of Linear Dispersion Space-Time Codes Based on QR Decomposition

Cortéz G. Joaquín, Pizarro L. Andrés O. and Domitsu K. Manuel

**Abstract**— A novel architecture for detection of Linear Dispersion Space-Time Codes (LDSTBC) over Rayleigh fading channels is presented. The LDSTBC scheme consists of one Alamouti space-time block code unit, plus two more antennas operating as two layers as V-BLAST unit in the transmitter. The LDSTBC receiver can be operate with three or more antennas simultaneously. The proposed receiver is based on an Ordered Successive Interference Cancellation (OSIC) scheme and the QR decomposition, which leads to a suitable hardware implementation. It was designed for Zero-Forcing (ZF) criterion; reduced complexity is achieved by means of an adequate rearrangement of the channel matrix elements. The detection scheme proposed is evaluated and compared with other similar recently reported proposal, assuming a channel without spatial correlation.

**Keywords**— MIMO systems, Linear Space-Time Codes Layered Space-Time Block Codes, QR decomposition

## I. INTRODUCTION

The demand for communication systems that effectively exploit the wireless channel's limited capacity [1] has grown rapidly during the last decade. In recent years, *multiple-input, multiple-output* (MIMO) systems have emerged as an attractive technique to increase the bit rate without raising neither power nor bandwidth resources. A MIMO system employs multiple antennas, both at the transmitter and the receiver, adding an extra degree of freedom in the design of communication systems. Two techniques have been developed to take advantage of MIMO systems: *Spatial Multiplexing* and *Diversity Transmission*. The first technique aims to increase the number of available transmit channels; one of its main proponents are *Vertical Layered Space-Time Codes*, also known as V-BLAST (*Bell-Labs Architecture for Space-Time*), which were first introduced in [2]. Their most interesting attributes are a very high spectral efficiency, ease of code design and comparatively simple receiver

Manuscrito recibido el 31 de Enero de 2008. Este trabajo fue respaldado por el departamento de Ing. Eléctrica y Electrónica del Instituto Tecnológico de Sonora.

Cortez G. Joaquin is with the Instituto Tecnológico de Sonora, Electric and Electronics Engineering Department, Av. Antonio Caso S/N Col Villa ITSON; Cd. Obregon, Sonora ,Mexico; C.P. 85138; Tel (644) 4109000 ext 1200; (email: jcortez@itson.mx).

Pizarro L. Andres O. is with the Instituto Tecnológico de Sonora, Electric and Electronics Engineering Department, Av. Antonio Caso S/N Col Villa ITSON; Cd. Obregon, Sonora,Mexico; C.P. 85138; Tel (644) 4109000 ext 1200; (email:apizarro@itson.mx).

architectures; their performance is highly dependent of the channel statistics such as the spatial correlation between antennas at the receiver and transmitter ends. The second technique has the goal of increasing diversity gain; this was achieved by the *Space-Time Block Codes* (STBC) [3]. Implementing STBC decoders is relatively easy to carry out, but they have the disadvantage that their spectral efficiency is low. A popular scheme that reaches full-diversity and full-rate was proposed in a seminal work by Alamouti [4].

Based on these techniques, a kind of space-time codes called *linear dispersion space-time codes* was presented in [5]; these codes are proposed as a very simple way to simultaneously obtain transmitter diversity and spatial multiplexing gain. The objective of our work is to introduce a detection scheme for this kind of codes.

We refer to this new architecture as *ZF-QR-OSIC-LDSTBC*, since the receiver is based on an *Ordered Successive Interference Cancellation* (OSIC) scheme and on the QR decomposition, and it uses the *Zero-Forcing* criterion [6]. We rearrange the elements of the channel matrix  $H$  in order to simplify its QR decomposition, and avoid calculating any matrix pseudo-inverse in the estimation and detection of the transmitted symbols. Symbols exhibiting diversity gain are detected first, followed by the spatially-multiplexed symbols. We show, by means of computer simulations, that the proposed scheme is capable of achieving similar performance with fewer antennas than other similar and recently proposed algorithms [7], [8], [9].

The outline of the paper is the following: Section II details the channel model under consideration. Section III contains an in-depth explanation of the proposed architecture and the detection algorithm. Section IV presents the detection algorithm proposed, in the section V we analyzes the simulation results; our conclusions are presented in section VI.

## II. CHANNEL MODEL

### A. Rayleigh Fading Channel

It is assumed that the propagation channel between each pair of transmit and receive antennas can be modeled as a Rayleigh narrowband stationary stochastic process. We also consider that the channel is scatterers-rich at both the transmitter and receiver sides. For simulation, a realization

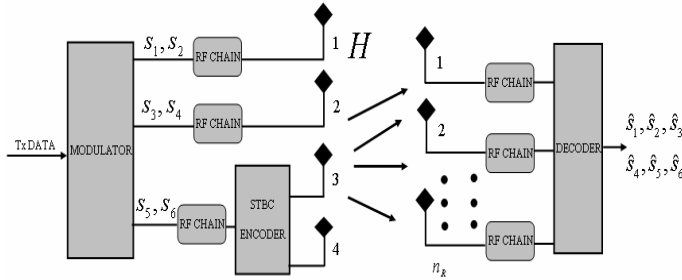


Fig. 1. ZF-QR-OSIC LDSTBC Transmitter/Receiver.

of the MIMO channel can be expressed as a random matrix  $H$  of size  $N_R \times n_T$ , where  $n_T$  and  $n_R$  are the number of antennas at the transmitter and receiver, respectively. The elements of  $H$  are denoted  $h_{ij}$ , for  $i=1, 2, \dots, n_R, j=1, 2, \dots, n_T$ . With the propagation model considered, each entry of  $H$  at any time is a complex Gaussian random variable with zero mean and variance 0.5 per dimension. We assume that the temporal channel fading is slow compared with the symbol period  $T$ , and thus a quasi-static block fading model is enough to characterize the temporal correlation; therefore, the channel matrix  $H$  is randomly generated, but remains constant during the transmission of one space-time code word of length  $2T$ . A new realization of the channel matrix, independent of the previous one, is then generated for each new space-time code word.

### III. SYSTEM MODEL

#### A. Linear Dispersion Space-Time Codes

The general structure of a linear dispersion code assume that the system have  $n_T$  transmit antennas,  $n_R$  receive antennas and where a set of  $Q$  symbols taken from a  $r$ -QAM constellation, are send through of the  $n_T$  transmit antennas during  $T$  symbols period. The allocation in space and time of the transmitted symbols is specified in the transmission matrix  $S$ .

The linear dispersion code for the matrix  $S$  can be defined by the next equation:

$$S = \sum_{q=1}^Q (\alpha_q A_q + j\beta_q B_q), \quad (1)$$

Where the real scalars  $\{\alpha_q, \beta_q\}$  are given by  $s_q = \alpha_q + j\beta_q$ , for  $q=1, 2, \dots, Q$ . The code is completely specified by the fixed  $T \times n_T$  complex matrices  $A_1, \dots, A_Q$  and  $B_1, \dots, B_Q$ .

#### B. QR-OSIC LDSTBC Transmitter

In general, the transmission process of a *linear dispersion space-time codes* scheme can be divided in layers, like V-BLAST. However, in contrast to V-BLAST, these schemes may consist of a stream of symbols at the output of an Alamouti STBC encoder [4], which is sent to a group of antennas, or of an uncoded stream, which is transmitted from a single antenna. The basic idea behind these structures is to combine array processing and space-time coding, as presented in [10]. We propose a *linear dispersion space-time code* MIMO transceiver, whose structure is shown in Fig. 1.

TABLE I. ANTENNA MAPPING FOR LDSTBC SCHEME

Time	Antenna 1	Antenna 2	Antenna 3	Antenna 4
$t$	$s_1$	$s_3$	$s_5$	$s_6$
$t+1$	$-s_2^*$	$-s_4^*$	$-s_6^*$	$s_5^*$

It employs four elements to transmit with three spatial multiplexing layers. In the first two layers one spatially multiplexed antenna is used in each layer, while in the third layer an Alamouti STBC encoder is used. Three or more antennas may be used in the receiver. As can be inferred from Fig. 1, we consider a MIMO system consisting of  $n_T=4$  transmit antennas and  $n_R \geq 3$  receive antennas. The input bit stream is mapped to symbols using a *QAM-16* modulator. For the purposes of simplification we assume that all the antennas transmit information symbols from the same constellation map, also we assume that the receiver is perfectly synchronized. The channel is modeled as  $H$ , where each element  $h_{ij}$  is the complex transfer function from transmitter  $j$  to receiver  $i$ . The receiver is assumed to know  $H$  perfectly. Also, it is assumed that  $H$  is full-rank. The total transmitted power is normalized to 1 watt.

During two symbol periods, the sequence of symbols  $\{s_i\}_{i=1}^6$  is transmitted and multiplexed over the four antennas as shown in Table I; therefore, we can write the system equation for the case when  $n_T=4$  and  $n_R=4$ , over two symbol periods, as:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & -s_2^* \\ s_3 & -s_4^* \\ s_5 & -s_6^* \\ s_6 & s_5^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \\ n_{31} & n_{32} \\ n_{41} & n_{42} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

or, equivalently,

$$Y = HS + N, \quad (3)$$

where  $y_{it}$  and  $n_{it}$  are the received signal and noise, respectively, in the instant  $t$  for the receiver antenna  $i$ . The noise samples  $n_{it}$  are i.i.d. complex Gaussian random variables with zero mean and variance  $\sigma_n^2$ .

From equation (2), it can be seen that six information symbols (two from each multiplexed layer) are transmitted in  $2T$  consecutive channel uses.

#### C. ZF-QR-OSIC LDSTBC as linear dispersion space-time code

The transmission matrix  $S$  for ZF-QR-OSIC LDSTBC can be specified by the next dispersion matrices  $A_1, \dots, A_Q$  and  $B_1, \dots, B_Q$  for  $q=1, 2, \dots, Q, T=2, n_T=4$  and  $n_R=4$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrices that generate the symbols of the transmission matrix  $S$  satisfies the constraint 1 of the proposed method given in [6].

#### IV. DETECTION ALGORITHM FOR ZF-QR-OSIC LDSTBC

The order of detection using Ordered Successive Interference Cancellation (OSIC) techniques based on the *zero-forcing* solution [6] in V-BLAST systems is very important because an optimum order can reduce the risk of error propagation in the estimation of the transmitted symbols. In [11] a very efficient method to obtain an optimal order based on the QR decomposition of the channel matrix  $H$  was proposed, it is presented as an extension to the Modified Gram-Schmidt algorithm [12] by reordering the columns of the channel matrix prior to each orthogonalization step. The principal idea is that  $\|r_{k,k}\|^2$  is *minimized* in the order in which are computed (from 1 to  $n_T$ ) instead of being *maximized* in the order of detection (from  $n_T$  to 1). Applying this idea in our proposed scheme for the two layers operating as V-BLAST we have to reorder the columns one and two from  $H$  of way that their norms satisfied the next equation:

$$\|H(:,1)\| < \|H(:,2)\|, \quad (4)$$

In [13], a successive interference cancellation scheme using the QR decomposition for the double space-time transmits diversity (DSTTD) system is proposed. We introduce the following difference: by rearranging the elements of the channel matrix  $H$ , the QR decomposition may be used to estimate the transmitted symbols. Adjusting this idea to our scheme, we rewrite equations (2) and (3) to obtain (5) and (6):

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12}^* \\ y_{21} \\ y_{22}^* \\ y_{31} \\ y_{32}^* \\ y_{41} \\ y_{42}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & h_{12} & 0 & h_{13} & h_{14} \\ 0 & -h_{11}^* & 0 & -h_{12}^* & h_{14}^* & -h_{13}^* \\ h_{21} & 0 & h_{22} & 0 & h_{23} & h_{24} \\ 0 & -h_{21}^* & 0 & -h_{22}^* & h_{24}^* & -h_{23}^* \\ h_{31} & 0 & h_{32} & 0 & h_{33} & h_{34} \\ 0 & -h_{31}^* & 0 & -h_{32}^* & h_{34}^* & -h_{33}^* \\ h_{41} & 0 & h_{42} & 0 & h_{43} & h_{44} \\ 0 & -h_{41}^* & 0 & -h_{42}^* & h_{44}^* & -h_{43}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12}^* \\ n_{21} \\ n_{22}^* \\ n_{31} \\ n_{32}^* \\ n_{41} \\ n_{42}^* \end{bmatrix}, \quad (5)$$

or equivalently,

$$Y_m = H_m S_m + N_m. \quad (6)$$

In the last expressions, the sub index  $m$  stands for *modified*. Note that the elements of the channel matrix have been rearranged in such a way that the QR decomposition leads directly to OSIC detection. It is also worthwhile to note that with this method, a change in the number of receiver antennas is straightforward; we need only to add or eliminate

the corresponding rows to  $H$ .

#### D. ZF-OSIC based on the QR decomposition (ZF-QR-OSIC-LDSTBC)

We first calculate the QR decomposition [12] of the channel matrix  $H_m$ , i.e.  $H_m = QR$ , where  $Q$  is a unitary matrix and  $R$  is an upper triangular matrix. By multiplying the received signal (6) by  $Q^H$ , the modified received vector is:

$$Y_m = Q^H Y_m = R S_m + N_m, \quad (7)$$

if vector  $S_m$  is transmitted. Note that the statistical properties of the noise term  $N_m = Q^H N_m$  remain unchanged. Due to the upper triangular structure of  $R$ , the  $k$ -th element of  $Y_m$  is:

$$y_k = r_{kk} s_k + \sum_{i=k+1}^4 r_{ki} s_i + n_k, \quad (8)$$

The symbols are estimated in sequence, from lower stream to higher stream, with successive interference cancellation; assuming that all previous decisions are correct, the interference can be perfectly cancelled in each step except for the additive noise. The estimated symbol  $\hat{s}_k$  is given by:

$$\hat{s}_k = D \left[ \frac{y_k - \sum_{i=k+1}^4 r_{ki} \hat{s}_i}{r_{kk}} \right], \quad (9)$$

where  $\hat{s}_k$  is the estimate of  $s_k$  and  $D[\cdot]$  is a decision device that maps its argument to the closest constellation point. We use the Modified Gram-Schmidt (MGS) method [11] to obtain the QR decomposition. In view of the structure of  $H_m$ , and that the first two columns of  $H_m$  have the same values and are orthogonal,  $Q$  and  $R$  are simplified to (10), (11):

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} & 0 & q_{15} - q_{25}^* \\ 0 & -q_{11}^* & 0 & -q_{13}^* & q_{25} & q_{15}^* \\ q_{31} & 0 & q_{33} & 0 & q_{35} - q_{45}^* \\ 0 & -q_{31}^* & 0 & -q_{33}^* & q_{45} & q_{35}^* \\ q_{51} & 0 & q_{53} & 0 & q_{55} - q_{65}^* \\ 0 & -q_{51}^* & 0 & -q_{53}^* & q_{65} & q_{55}^* \\ q_{71} & 0 & q_{73} & 0 & q_{75} - q_{85}^* \\ 0 & -q_{71}^* & 0 & -q_{73}^* & q_{85} & q_{75}^* \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} & 0 & r_{15} - r_{25}^* \\ 0 & -r_{11} & 0 & -r_{13} & r_{25} & r_{15}^* \\ 0 & 0 & r_{33} & 0 & r_{35} - r_{45}^* \\ 0 & 0 & 0 & -r_{33} & r_{45} & r_{35}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{55} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Note that the last structure further reduces the complexity

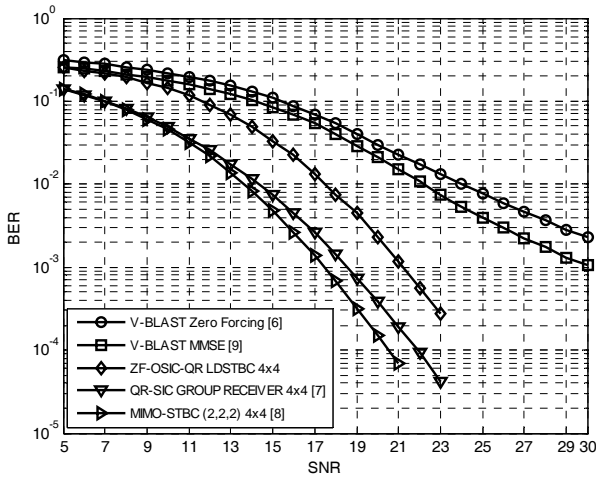


Fig. 2. Bit Error Rate of different MIMO systems.

TABLE II. SPATIAL DATA RATE FOR THE DIFFERENT SCHEMES

V-BLAST Zero Forcing	V-BLAST MMSE	ZF-OSIC- QR- LDSTBC	QR-SIC GROUP RECEIVE R	MIMO- STBC
4	4	3	2	2

of the decomposition of the matrix  $H_m$ , as it is only necessary to compute three columns of  $Q$  and three rows of  $R$  (irrespective of the numbers of rows).

From (10) and (11), we can see that the structure of  $H_m$  may be exploited to reduce the complexity of the  $QR$  decomposition. Therefore, we can implement a low complexity  $ZF$ - $OSIC$  based on the  $QR$  decomposition ( $ZF$ - $QR$ - $OSIC$ ) for the  $LDSTBC$  scheme proposed.

## V. RESULTS

We compare the performance of the detection schemes in terms of bit error rate (BER) for uncorrelated channels. We use a  $QAM$ -16 modulator. All simulations were run until 2000 frame errors were found. We define the spatial code rate  $r_s=N/T$ , where  $N$  independent symbols are transmitted over  $T$  symbol periods, as the average number of independent symbols transmitted from all antennas per symbol period. The receiver is assumed to have perfect channel estimation. Fig. 2 show the obtained BER for the different schemes, including  $ZF$ - $QR$ - $OSIC$   $LDSTBC$ . In the table II, we show the spatial code rate for the different schemes evaluated in this work. Making an analysis of the figure 1 and the Table II, we can see as the scheme proposal in this work shows a better trade-off between performance and spectral efficiency with respect at schemes based in spatial multiplexing or diversity. For example we observe in the figure as our proposal for  $BER=2e-03$  outperforms with 10dB and 8dB at the schemes purely spatial proposed in [6] and [9]. Exchange with respect at the schemes with diversity proposed in [7] and [8], our proposal shows around 1.25dB and 1.75dB worst for  $BER=1e-03$  respectively, but we achieve a major spectral efficiency with respect these

schemes.

In summary, we have proposed a transmission scheme with better trade-off among performance and spectral efficiency complexity, with respect at schemes purely spatial or with diversity. Also the detection scheme proposed is easily scalable and with low complexity and may be more attractive to uses in systems that require high data rate transmission with low power consumption.

## VI. CONCLUSIONS

Linear dispersion space-time receivers represent a compromise between diversity and high spectral efficiency. It is interesting note as they allow the possibility of increases the rate of the purely diversity scheme with a penalty in their performance of the system, but with a better behavior with respect at schemes purely spatial. Current power and hardware size requirements dictate that receivers should be as simple as possible and avoid complex operations. We have shown a receiver algorithm that avoids matrix inverses while also reducing the complexity of the  $QR$  decomposition.

## REFERENCES

- [1] I. E. Telatar, "Capacity of multiple-antenna Gaussian channels," *European Trans. Telecommunications*, vol. 10, no. 6, pp. 585-595, 1999
- [2] G. J. Foschini, "Layered space-time architectures for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas," *Bell Lab Tech. J.*, vol. 1, no. 2, pp. 41-59, 1996.
- [3] V. Tarokh, H. Jafarkhani, and A. R. Calderbank, "Space-time block codes from orthogonal designs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, pp.1456-1457, July 1999.
- [4] S. M. Alamouti, "A simple transmit diversity technique for wireless communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, October 1998.
- [5] B. Hassibi and B. M. Hochwald, "High-rate codes that are linear in space and time," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 48, pp. 1804-1824, 2002.
- [6] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, G. D. Golden, and R. A. Valenzuela, "V-BLAST: An Architecture for Realizing Very High Data Rates Over the Rich-Scattering Wireless channel," in *Proc. ISSE*, Pisa, Italy, September 1998.
- [7] L. Zhao and V. K. Dubey, "Detection Schemes for Space-time Block Code and Spatial Multiplexing Combined System," *IEEE Communication Letters*, vol. 9, no. 1, January 2005.
- [8] T. Mao and M. Motani, "STBC-VBLAST for MIMO wireless communication systems," in *Proceedings of International Conference on Communications ICC 2005*, vol. 4, pp. 2266-2270, May 2005.
- [9] B. Hassibi, "An efficient square-root algorithm for BLAST," *ICASSP 2000*, Vol. 2, pp. 5-9,2000
- [10] V. Tarokh, A. Naguib, N. Seshadri and A. R. Calderbank, "Combined Array processing and space-time coding," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.45, pp.1121-1128, May 1999.
- [11] R. Böhnke, D. Wüben, V. Kühn and K. Kammeyer, "Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures," in *Proceedings of Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2003)*, vol. 4, pp. 2258-2262, 2003
- [12] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, third edition, Baltimore, John Hopkins University Press, 1996.
- [13] H. Kim, H. Park, T. Kim and I. Eo, "Performance Analysis of a DSTD System with Decision-Feedback Detection", in *Proc. ICASSP 2006*, vol. 4, pp. 749-752, 2006.



**Cortez G. Joaquin** (1972). He received the Master's degree in Electric Engineering from CINVESTAV-Guadalajara, in 2001 and Ph. D. degree in Electric Engineering from CINVESTAV-Guadalajara, in 2008. He is currently a Professor of Electrical and Electronics Engineering at Technologic Institute of Sonora,. His teaching and research interest are the digital communications and digital signal processing.



**Andrés O. Pizarro L.** (1973). He received the degree in Electronic Engineering from Instituto Tecnológico de la Laguna in 1995. He carried out postgraduate studies in the Instituto Tecnológico de La Laguna among 1995 and 1997. He is currently a Professor of Electrical and Electronics Engineering at Technologic Institute of Sonora,. His teaching and research interest are digital signal processing and control systems.



**Manuel Domitsu Kono** tiene el grado de Maestro en Ciencias Computacionales en el del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey y el Grado de Maestro en Administración en el Instituto tecnológico de Sonora. De 1976 a 1983 y de 1989 a la fecha se ha desempeñado como Profesor – Investigador de Tiempo Completo en el Instituto tecnológico de Sonora. Ha participado en algunos proyectos de desarrollo de software, entre ellos el software de Recepción de Imágenes del Satélite Metereológico GOES y un Programa de Procesamiento de Imágenes. Sus principales intereses son el Desarrollo de Software y los Sistemas Distribuidos.



# Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados.

Anzures M. Juan, Padilla G. José A. y Cuevas S. Omar.

**Resumen**— En el presente artículo se plantea una metodología para el análisis de estabilidad de los sistemas no lineales utilizando el método directo e indirecto de Lyapunov. Al mismo tiempo, se plantea la solución desde el punto de vista gráfico a partir del Retrato de Fase obtenido utilizando la herramienta “*Pplane7.m*” de Matlab®. Se presenta una revisión de las principales características de los sistemas no lineales y se listan los principales puntos de equilibrio para dichos sistemas, así como sus propiedades. El análisis realizado está desarrollado para sistemas de segundo orden representados mediante variables de estado. El ejemplo de aplicación está basado en el modelo de un sistema hidráulico no lineal de dos tanques interconectados.

**Palabras clave**—Estabilidad de Lyapunov, Método directo e indirecto de Lyapunov, Puntos de equilibrio, Estabilidad asintótica, Retrato de fase.

## I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de sistemas físicos son de naturaleza no lineal. Sin embargo, es posible realizar aproximaciones de estos sistemas para considerarlos como sistemas lineales. La aplicación de técnicas de control no lineal permite un mejor entendimiento del sistema físico y por ende mejores resultados en el control del mismo. Por esta razón, durante el modelado del sistema físico es necesario considerar la estabilidad del mismo y los puntos de equilibrio [10].

Así, la estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Cuando se analiza la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se caracterice el propio sistema en consideración. Por ejemplo, para sistemas lineales y

estacionarios, existen métodos para poder determinar su estabilidad entrada acotada salida acotada (BIBO por sus siglas en inglés Bounded Input Bounded Output; es decir, un sistema lineal invariante en el tiempo se dice BIBO estable si y sólo si a toda función de entrada acotada le corresponde una función de salida acotada) tales como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no son evidentes en los sistemas lineales [1]. Uno de estos fenómenos es la existencia de *múltiples puntos de equilibrio aislados*. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que –si el punto es estable– atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Es por ello que, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales con lo cual se logra un mejor entendimiento del comportamiento del mismo.

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio también es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo [3], [4], [11]. Así además, la estabilidad se puede analizar utilizando técnicas gráficas como lo es un retrato de fase, donde se muestran las regiones o puntos estables del sistema y la dirección desde la cual se alcanza la estabilidad.

En este artículo se presentan algunas técnicas de análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas no lineales mediante el análisis del comportamiento del estado en una vecindad del punto de equilibrio. La estabilidad se analiza en el sentido de Lyapunov mediante sus dos métodos directo e indirecto. Una característica importante en el artículo es la utilización de la herramienta de Matlab® llamada “*Pplane7.m*”, mediante la cual se obtienen los retratos de fase para mostrar los conceptos de estabilidad de los puntos de equilibrio de manera gráfica con ello se facilita la interpretación del análisis. El sistema no lineal seleccionado para el análisis es un sistema hidráulico formado por dos tanques interconectados. En la Figura 2 se muestra un esquema del mismo.

Manuscrito recibido el 25 de Marzo de 2008. Este trabajo fue respaldado por la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ing. Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Anzures M. Juan hasta la fecha se ha desempeñado como Profesor de Tiempo Completo de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, División de Estudios de Posgrado; Ave. Fco. J. Mújica S/N, Ciudad Universitaria; Morelia, Michoacán., México; C.P. 58030; Tel: (443) 3223500, ext. 4354 y 1115; Fax: (443) 327 9728. (e-mail [janzures@jupiter.umich.mx](mailto:janzures@jupiter.umich.mx)).

José A. Padilla hasta la fecha se ha desempeñado como estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de la División de Estudios de Posgrado de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, actualmente cursa el tercer semestre de la Opción de Control Automático. (e-mail [joseaaron@latinmail.com](mailto:joseaaron@latinmail.com)).

Omar C. Silva hasta la fecha se ha desempeñado como estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de la División de Estudios de Posgrado de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, actualmente cursa el tercer semestre de la Opción de Control Automático (e-mail [mayrux@hotmail.com](mailto:mayrux@hotmail.com)).



La estructura del artículo es como sigue: en la sección II se presentan las principales propiedades de los sistemas no lineales, definiciones básicas así como la clasificación de los principales puntos de equilibrio que se presentan en los sistemas no lineales. En la sección III se hace una presentación básica de la teoría de estabilidad de Lyapunov. En la sección IV se presenta el modelo del sistema bajo análisis, se muestran los resultados de estabilidad aplicando la teoría de Lyapunov, asimismo se muestran los resultados gráficos usando la herramienta “*PPlane7.m*” de Matlab® usando tres escenarios a partir del cambio de la naturaleza del flujo de entrada al sistema. Finalmente la sección V presenta algunas conclusiones generales del trabajo presentado en este artículo. Es de interés de los autores mostrar la facilidad del uso de la herramienta de Matlab® para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales. En el presente artículo no se hace la demostración de los teoremas, el lector se puede referir a las citas que se enlistan después de los teoremas.

## II. PROPIEDADES DE UN SISTEMA NO LINEAL

Generalmente cuando se trabaja con sistemas dinámicos que son modelados mediante un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas, donde las variables de estado representan la “memoria” que tiene el sistema dinámico de su pasado. Usualmente se emplea la notación vectorial para escribir estas ecuaciones de manera compacta, se puede definir y reescribir las  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden como una ecuación diferencial vectorial de dimensión  $n$  [1].

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa los estados,  $u \in \mathbb{R}^p$  son las variables de entrada todo con respecto al tiempo  $t$ .

Todos los sistemas físicos son inherentemente no lineales, los sistemas de control son no lineales en una cierta extensión y pueden ser descritos mediante ecuaciones diferenciales no lineales.

El sistema no lineal puede ser aproximado mediante un sistema linealizado:

1. Si el rango de operación es pequeño.
2. Si las no linealidades involucradas son suaves.
3. Si su dinámica se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales.

Por esta razón, tienen un rango de operación más amplio y su comportamiento en la vecindad de un punto de equilibrio es similar a la del sistema lineal. Es decir, el estudio de estos sistemas mejora la interpretación de los sistemas dinámicos.

Los sistemas no lineales pueden presentar oscilaciones de amplitud y periodo fijos sin excitación externa, es decir, pueden presentar lo que se conoce como *ciclos límite*. Además, los cambios cualitativos de los parámetros de un sistema no lineal conllevan a cambios cualitativos de las propiedades del sistema.

En los sistemas lineales, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden causar sólo pequeñas

diferencias en la salida. Los sistemas no lineales pueden desplegar un fenómeno llamado *caos*. Un sistema estable tiende a lo largo del tiempo a un punto de equilibrio, u órbita, según su dimensión (atractor). Un sistema inestable se escapa de los atractores. Y un sistema caótico manifiesta los dos comportamientos. Por un lado, existe un atractor por el que el sistema se ve atraído, pero a la vez, hay “fuerzas” que lo alejan de éste. De esa manera, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo. Una de las mayores características de un sistema inestable es que tiene una gran independencia de las condiciones iniciales. De un sistema del que se conocen sus ecuaciones características, y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta [12]. Ejemplos de tales sistemas incluyen la atmósfera terrestre, el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento y los crecimientos de población.

Una de las herramientas gráficas útiles para la visualización cualitativa del comportamiento de sistemas no lineales es el llamado *Retrato de Fase*, el cual está constituido por la familia de todas las trayectorias o soluciones de un sistema no lineal de segundo orden para diferentes condiciones iniciales, a través de las isoclinas. Este método fue introducido por Henri Poincaré, dicho método es aplicable a cualquier tipo de no linealidad, con la premisa de que muchos sistemas se pueden aproximar a uno de segundo orden, sin embargo, desde otro punto de vista esto puede representar una ligera desventaja. En el presente artículo se utiliza la herramienta “*PPlane7.m*” de Matlab® para dibujar el retrato de fase del sistema no lineal motivo de análisis, es decir, del sistema de nivel de líquido de dos tanques interconectados.

### A. Clasificación de los puntos de equilibrio

De acuerdo a la ubicación de los polos del sistema los puntos de equilibrio en un sistema no lineal se pueden clasificar como:

1. *Nodo estable*, si los polos son reales y se encuentran en el semiplano-izquierdo.
2. *Nodo inestable*, si los polos son reales y se encuentran en el semiplano-derecho.
3. *Foco estable* (espira) cuando los polos son complejos en el semiplano izquierdo.
4. *Foco inestable* (espira) cuando los polos son complejos en el semiplano-derecho.
5. *Centro*, cuando los polos son complejos en el eje imaginario.
6. *Nodo silla*, cuando hay un polo real en el semiplano izquierdo y otro en el semiplano derecho.
7. *Línea continua de puntos de equilibrio*, cuando un polo es nulo.
8. *Puntos de equilibrio hiperbólico* (estructuralmente estable): conserva su comportamiento cualitativo ante pequeñas perturbaciones. Condición: las raíces del modelo linealizado tiene  $\text{Re } \lambda \neq 0$ .

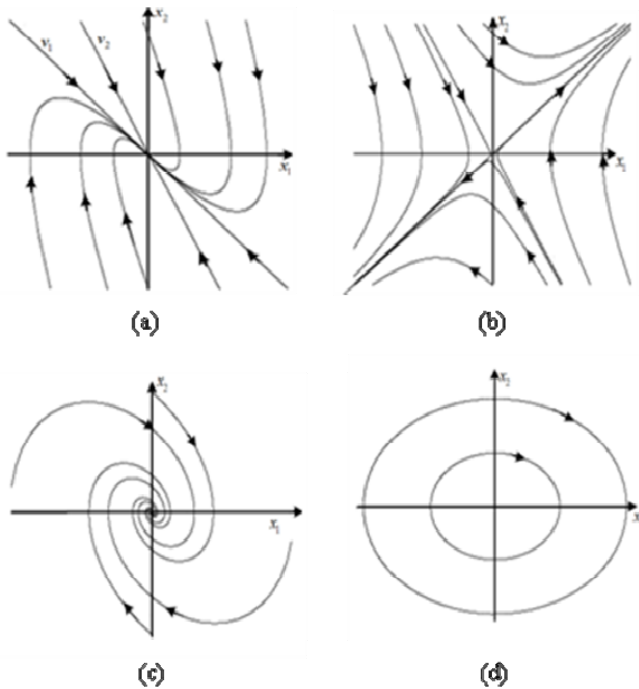


Fig. 1. Ejemplos gráficos de los puntos de equilibrio para un sistema no lineal. (a) Nodo estable, (b) Nodo silla, (c) Foco estable y (d) Centro

El comportamiento cualitativo de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrios puede determinarse por medio de la linealización. Los puntos de equilibrio de un sistema no lineal reciben el mismo nombre del caso lineal (*nodo*, *foco*, *silla*). Un punto de equilibrio (PE) es aislado si al linealizar,  $|A| \neq 0$ . Por ejemplo, el péndulo invertido tiene puntos de equilibrio tipo foco.

En la Figura 1 se muestran 4 ejemplos de diagramas de retrato de fase para puntos de equilibrio.

### III. ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del mismo, de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

**Teorema 1 (Método Directo):** Sea el origen  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema no lineal  $\dot{x} = f(x)$  donde  $f : D \subset \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Entonces, el origen es ASINTÓTICAMENTE ESTABLE si todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa.

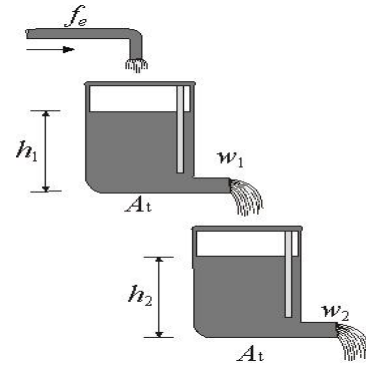


Fig. 2. Sistema Hidráulico de dos tanques en cascada.

El origen es INESTABLE si uno o más valores propios de  $A$  tienen parte real positiva. ♦

**Teorema 2 (Método Indirecto):** Sea el origen  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen. Sea  $V \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D$$

Entonces  $x = 0$  es ESTABLE, más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D,$$

entonces  $x = 0$  es ASINTÓTICAMENTE ESTABLE ♦.

La demostración de los teoremas 1 y 2 se pueden ver en [1], [3] y [4].

### IV. APLICACIÓN: SISTEMA HIDRÁULICO DE DOS TANQUES INTERCONECTADOS

El sistema bajo análisis está formado por dos tanques conectado en cascada, es decir, el flujo de salida del primer tanque es el flujo de entrada al segundo tanque, como se muestra en la Figura 2.

El modelo matemático del sistema está definido por:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{f_e}{A_t} - \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} \quad (1)$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{w_1}{A_t} \sqrt{h_1} - \frac{w_2}{A_t} \sqrt{h_2} \quad (2)$$

Donde  $h_1$  y  $h_2$  son los niveles de los tanques,  $f_e$  el flujo de alimentación o entrada,  $w_1$  y  $w_2$  son las razones del flujo de salida de cada depósito, y  $A_t$  el área de la sección transversal del tanque.

#### A. Sistema Hidráulico con entrada unitaria

Para fines prácticos de estudio tomamos los siguientes valores:

$$w_1 = A_t = f_e = 1(\text{unidades}) \quad w_2 = 2(\text{unidades})$$

Sustituyendo, el sistema (1)-(2) se convierte en:

$$\dot{h}_1(t) = 1 - \sqrt{h_1} \quad (3)$$

$$\dot{h}_2(t) = \sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2} \quad (4)$$

El siguiente paso de la metodología es encontrar los puntos de equilibrio. Para ello primero, igualamos a cero las derivadas, es decir:

$$\dot{h}_1 = f_1(h_1, h_2) = 0$$

$$\dot{h}_2 = f_2(h_1, h_2) = 0$$

De la ecuación (3) obtenemos que:

$$1 - \sqrt{h_1} = 0 \quad \therefore \quad h_1 = 1$$

De la ecuación (4) y sustituyendo  $h_1$ :

$$\sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2} = 0 \quad \therefore \quad h_2 = \frac{1}{4}$$

De lo anterior se observa que el sistema tiene un sólo punto de equilibrio (para estas condiciones) el cual se encuentra en  $\left( h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{4} \right)$ .

A continuación, se prueba la estabilidad del punto de equilibrio usando primero el método indirecto de Lyapunov, es decir, usando linealización, para ello se determina el Jacobiano establecido por el teorema 1 definido como:

$$A = \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{h=PE} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix}_{h=PE}$$

Resultando:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{h_1}} & -\frac{1}{\sqrt{h_2}} \end{bmatrix}_{h=(1, \frac{1}{4})} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Se encuentran los valores propios de A.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & s + 2 \end{pmatrix} = \left( s + \frac{1}{2} \right) (s + 2)$$

Por lo que los eigenvalores son:

$$s_1 = -\frac{1}{2} \quad y \quad s_2 = -2$$

Entonces, debido a que los polos son reales negativos el punto de equilibrio es un *NODO ESTABLE*, de acuerdo a la clasificación de los puntos de equilibrio, vista en la sección II.

Ahora, usando el método directo de Lyapunov:

Sea la función de Lyapunov  $V(h) = h^T P h$  donde

$P = Identidad$ , es decir:

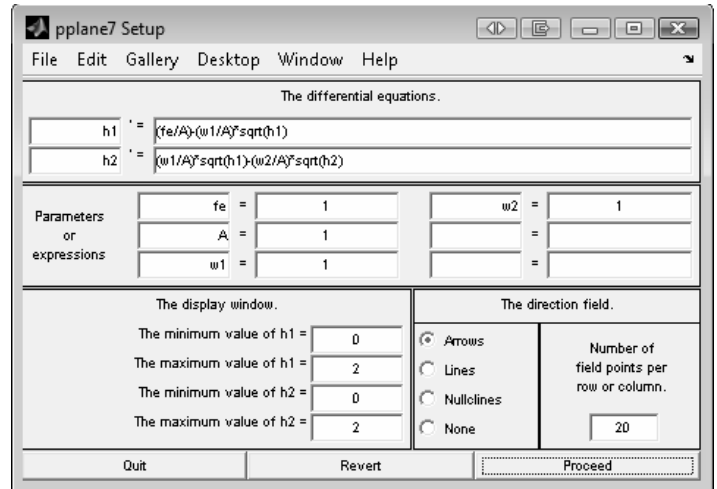


Fig. 3. Interfase gráfica para la introducción de las ecuaciones del sistema hidráulico en Pplane7.m.

$$V(h) = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$$

Con esto se cumple la primera condición  $V(h) > 0$  del teorema 2. Posteriormente se obtiene:

$$\dot{V}(h) = \frac{\partial V(h)}{\partial h_1} \dot{h}_1 + \frac{\partial V(h)}{\partial h_2} \dot{h}_2$$

La cual nos queda como:

$$\dot{V}(h) = h_1(1 - \sqrt{h_1}) + h_2(\sqrt{h_1} - 2\sqrt{h_2})$$

Reordenando los términos

$$\dot{V}(h) = -\left(\sqrt[3]{h_1^2} + 2\sqrt[3]{h_2^2}\right) + (h_1 + \sqrt{h_1}h_2)$$

Donde es fácil ver que el primer término de la derecha es el término dominante; es decir,

$$(h_1 + \sqrt{h_1}h_2) \leq \left(\sqrt[3]{h_1^2} + 2\sqrt[3]{h_2^2}\right)$$

Entonces, sin importar los valores que tome  $h_1$  y  $h_2$  la  $\dot{V}(h)$  nunca tomará valores positivos, esto es, se cumple la segunda condición del teorema 2  $\dot{V}(h) \leq 0$ . Por lo tanto el punto de equilibrio es ESTABLE.

Una segunda parte del análisis de estabilidad propuesto en este artículo, es la simulación utilizando la herramienta o rutina "Pplane7.m" de Matlab®, con la cual a través de su interfase podemos construir los retratos de fase de sistemas no lineales de segundo orden (se usan las dos ecuaciones). La interfase gráfica de Pplane7 se muestra en la Figura 3 en ella se escriben directamente las ecuaciones diferenciales, parámetros o expresiones, el rango de la ventana donde se dibuja el retrato de fase, es decir los valores máximos de las variables de estado y el número de puntos por renglón y columna.

Así, con los datos del ejemplo se obtiene el retrato de fase mostrado en la Figura 4.

En la figura 4 se puede observar fácilmente el punto de equilibrio en  $(1, \frac{1}{4})$  para diferentes condiciones iniciales por

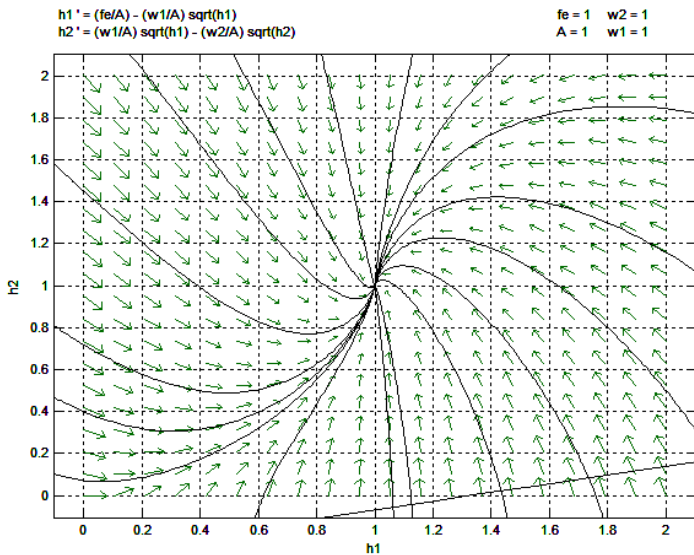


Fig. 4. Retrato de fase de sistema hidráulico de dos tanques.

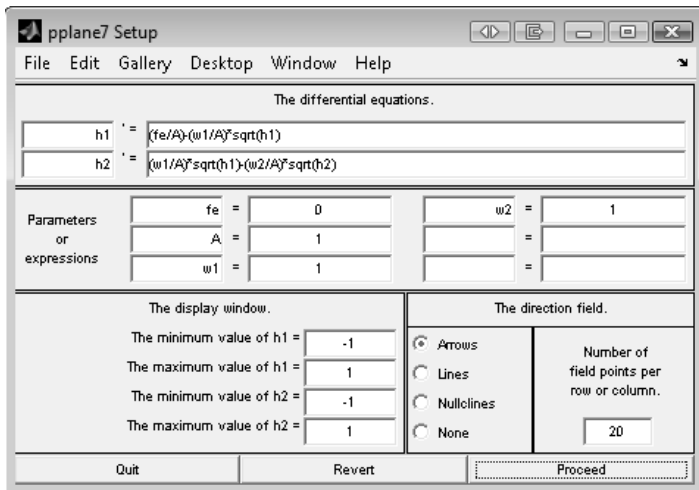


Fig. 5. Interfase gráfica de Pplane7 de MATLAB, para el sin entrada.

lo que este punto es un *NODO ESTABLE*, como se había definido a través del método analítico.

*B. Sistema hidráulico sin entrada*

Considérese un flujo de entrada cero y seguimos considerando el área de los dos tanques iguales y de magnitud unitaria. De igual manera para el factor de apertura en las dos válvulas, con lo cual los parámetros del modelo son:  $A = 1, k_1 = 1, k_2 = 1$  y  $f_e = 0$ . Tal como se muestra en la interfaz gráfica de “Pplane7.m” en la Figura 5.

De manera similar al ejemplo anterior podemos hacer el análisis de este caso como se indica a continuación; para el sistema sin entrada el modelo (1)-(2) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Para encontrar el punto de equilibrio, las ecuaciones diferenciales se igualan a cero

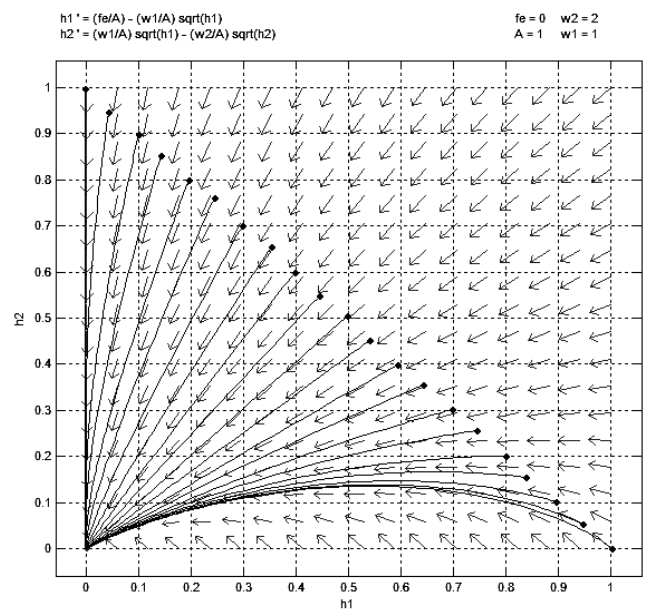


Fig. 6. Retrato de fase para diferentes condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{h_1} \rightarrow h_1 = 0 \\ 0 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \rightarrow h_2 = 0 \end{aligned}$$

Así, es fácil ver que el punto de equilibrio (PE) se encuentra en (0,0), el cual es diferente al del caso anterior, con lo cual se demuestra la existencia de múltiples puntos de equilibrio en un sistema no lineal.

En el retrato de fase de la Figura 6 se observa la trayectoria para diferentes condiciones iniciales. Por ejemplo, para la condición inicial  $h_1 = 1$  y  $h_2 = 0$ , el tanque 1 inicia con una altura unitaria y durante la evolución, hacia el origen, transfiere su volumen al tanque 2 con un factor de apertura en la válvula  $k_1$ . El tanque 2 a su vez, desahoga su volumen quedándose finalmente ambos tanques con una altura de cero. Entonces cualquier trayectoria del retrato de fase terminará en el punto de equilibrio.

*C. Sistema hidráulico con  $f_e = 0.5$*

Por otro lado, para un flujo de entrada constante  $f_e = 0.5$ , su diagrama de fase se muestra en la Figura 7. En éste se ilustra la nueva trayectoria de evolución del sistema y cómo el punto de equilibrio ha cambiado a  $h_1 = 0.25$  y  $h_2 = 0.25$ .

El punto de equilibrio con entrada de flujo constante representa la permanencia constante de los estados en un punto diferente al origen. Para demostrar la estabilidad se considera la entrada  $f_e = 0.5$ , entonces las ecuaciones de estado se reescriben como

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{1}{2} - \sqrt{h_1} \\ \dot{h}_2 &= \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{aligned} \tag{6}$$

Igualándolas a cero para obtener su punto de equilibrio

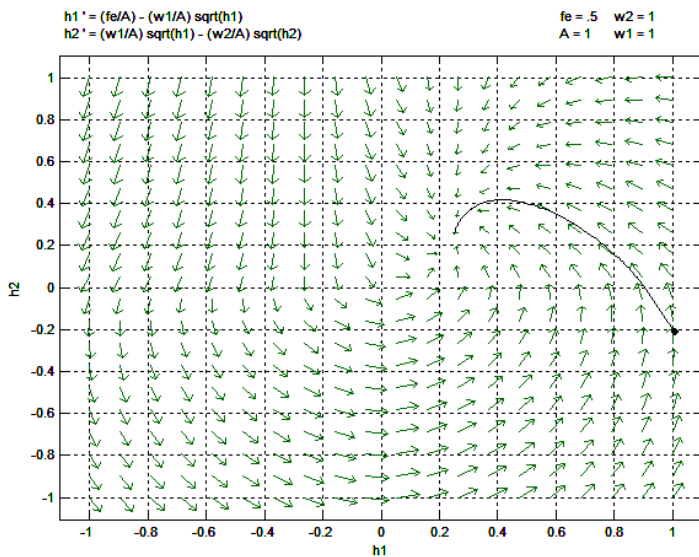


Fig. 7. Retrato de fase para el sistema de dos tanques con  $f_e = 0.5$ .

$$0 = 0.5 - \sqrt{h_1} \rightarrow h_1 = \left(\frac{f_e}{k_1}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

$$0 = \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \rightarrow h_2 = \left(\frac{f_e}{k_2}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1}\right)^2 = 0.25$$

De igual manera que en el ejemplo 1, la metodología indica el empleo del Jacobiano (Teorema 1) y la evaluación del mismo en el punto de equilibrio.

$$A|_{PE} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh_1} & \frac{df_1}{dh_2} \\ \frac{df_2}{dh_1} & \frac{df_2}{dh_2} \end{bmatrix}_{PE} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2h_1^{1/2}} & 0 \\ \frac{1}{2h_1^{1/2}} & -\frac{1}{2h_2^{1/2}} \end{bmatrix}_{(0.25, 0.25)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se desarrolla  $\det(SI - A|_{PE})$ .

$$\det(SI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+1) = (s+1)^2$$

Es fácil de ver que los valores propios del sistema son reales y negativos, por lo tanto el punto de equilibrio es un NODO ESTABLE, como ya se había observado en el retrato de fase de la Figura 7.

## V. CONCLUSIONES

La metodología para el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales desde el punto de vista de Lyapunov, basados en el método directo como en el indirecto, permite obtener resultados formales de estabilidad con un cierto grado de dificultad; sobre todo al momento de la selección de la función de Lyapunov.

El retrato de fase diseñado usando “*Pplane7.m*” de Matlab® se presentan en este artículo como una alternativa

didáctica para demostrar gráficamente el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales de segundo orden. Para lo cual se hace necesario mostrar una lista de los principales puntos de equilibrio que se pueden apreciar en este tipo de sistemas.

El ejemplo de aplicación utilizado (Sistema hidráulico no lineal de dos tanques interconectados) permite demostrar la efectividad de la metodología para el análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio, tanto en forma analítica como en forma gráfica. En el sistema de los dos tanques, el punto de equilibrio con entrada de flujo constante, representa la permanencia constante de los estados del sistema en un punto diferente al origen.

## REFERENCIAS

- [1] Hassan. K. Khalil, “*Nonlinear systems*”, New Jersey, Prentice Hall, 2002.
- [2] T. Kailath, “*Linear Systems*”, New York, Prentice Hall, 1980.
- [3] M. Vidyasagar, “*Nonlinear Systems Analysis*”, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [4] J.J.E. Slotine, W. Li, “*Applied Nonlinear Control*”, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [5] F. Mazenc; S.I. Nucleescu, “*Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems*”, Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Volume 3, Issue , 2000 Page(s):2100 - 2105 vol.3.
- [6] Q. Jiang; S. Cheng; Y. Cao, “*Lyapunov stability analysis of turbine-generator including shaft system*”, *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, Volume 25, Number 9, November 2003 , pp. 741-746(6).
- [7] M.S Branicky, “*Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*”, Automatic Control, IEEE Transactions on Volume 43, Issue 4, Apr 1998, pp: 475 – 482.
- [8] Daafouz, J. Riedinger, P. Iung, C., “*Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach*”, Automatic Control\_IEEE Transactions on, Nov 2002, Volume: 47, pp:1883- 1887.
- [9] D. Shevitz, B. Paden, “*Lyapunov stability theory of nonsmooth systems*”, IEEE Transactions on Automatic Control, Sep 1994, Volumen 39, pp: 1910-1914.
- [10] A. Alzate, E. Giraldo Suarez, “*Aplicación de Controles Inteligentes sobre Sistemas no Lineales y Análisis de Estabilidad en el Plano de Fase*”, Scientia et Technica Año XII, No. 32, Diciembre 2006, pp. 169-174.
- [11] Z.G. Li, Y. C. Soh, C.Y. Wen, “*Robust Stability of a Class of Hybrid Nonlinear System*”, IEEE Trans on Automatic Control, Vol., 46, No. 6, June 2001, pp. 897-903.
- [12] J. Zhu, Y.P. Tian, “*Stabilizing Periodic Solution of Nonlinear Systems and Applications in Chaos Control*”, IEEE Trans on Circuits and Systems II, Vol., 52, No. 12, Dec 2005, pp. 870-874.



**Juan Anzures Marín**, Nació en el estado de Puebla en 1968, recibió el título de: Ingeniero Electricista por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo en 1991; Maestro en Ciencias en Ingeniería Electrónica opción instrumentación por la División de Estudios Superiores del Instituto Tecnológico de Chihuahua en 1997 y Dr. en Ciencias en Ingeniería Eléctrica opción Control Automático por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN,

CINVESTAV, Unidad Guadalajara en 2007. Es profesor de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana desde 1987 actualmente colabora en los programas Licenciatura y Posgrado de la misma Facultad. Sus áreas de interés son Instrumentación y Control de Sistemas así como el desarrollo de algoritmos para el diagnóstico de fallas en sistemas no lineales y Energy Harvesting.



**José Aarón Padilla García.** Nació en Cd. Lázaro Cárdenas Michoacán en 1978. Realizó sus estudios de Licenciatura en el Tecnológico de Lázaro Cárdenas, obtuvo el Título de Ingeniero Electrónico en el 2003, actualmente se encuentra realizando estudios de maestría en la división de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Sus áreas de interés son Instrumentación y control, Modelado en Bond

Graph y Robótica.



**Omar Cuevas Silva.** Nació en Cd. Lázaro Cárdenas Michoacán en 1981. Realizo sus estudios en el de Licenciatura en el Tecnológico de Lázaro Cárdenas, obtuvo el Título de Ingeniero Electrónico en el 2005, actualmente se encuentra realizando estudios de maestría en la división de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo. Sus áreas de interés son Sistemas Digitales, Programación Visual, Redes

Neuronales y Robótica.



# Aplicación del Dominio Armónico Extendido al Análisis de Estado Quasi-Estacionario de los Sistemas Eléctricos de Potencia

Lázaro C. Isidro, Maldonado P. Jesús y Rico M. Jesús

**Resumen**— Este artículo presenta una técnica para analizar sistemas eléctricos de potencia en estado quasi-estacionario, en los cuales se incorporan cargas dinámicas no lineales en algunos de sus nodos, en particular motores de inducción. La técnica toma como base las series de Fourier, el principio de los fasores dinámicos y los conceptos de las matrices operacionales, herramientas que conforman lo que hoy en día se conoce como Dominio Armónico Extendido (DAE), en conjunto con el estudio de Flujos de Potencia. El DAE permite la conexión de una carga dinámica a un sistema de potencia de manera directa. La principal ventaja de esta técnica es el hecho de obtener una herramienta generalizada capaz de estudiar sistemas con las características antes mencionadas, los cuales a través de herramientas comerciales como el ATP (Alternative Transients Program) dificultarían su estudio, debido a que en general este tipo de sistemas tiene un comportamiento subamortiguado de larga duración. Además, mediante esta técnica se puede entre otras cosas detectar y estudiar las depresiones de voltaje, los cuales pueden ocurrir por la conexión repentina de grandes cargas en los sistemas eléctricos.

**Palabras clave**— Dominio Armónico Extendido, Fasores Dinámicos, Matrices Operacionales, Motor de Inducción, Series de Fourier.

## I. INTRODUCCIÓN

Hoy en día existe una gran cantidad de herramientas diseñadas para estudiar los sistemas eléctricos de potencia, con la finalidad de optimizar su operación, algunas de ellas se han desarrollado para el estudio de su estado dinámico, por ejemplo el ATP, cuya principal potencialidad es el análisis de los transitorios electromagnéticos que presentan una duración de tiempo alrededor de microsegundos. Otras se han desarrollado para el análisis del estado estable, tal es el caso de la herramienta de flujos de potencia, cuya solución proporciona el estado de operación del sistema para condiciones de carga constantes.

Manuscrito recibido el 11 de Febrero de 2008. Este trabajo fue respaldado por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Lázaro C. Isidro hasta la fecha se ha desempeñado como Profesor e Investigador de Tiempo Completo de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo; Ave. Fco. J. Mújica S/N Col. Villa Universidad; Morelia, Mich., México; C.P. 58030; Tel: (443) 3223500, ext. 4354; Fax: (443) 3223500 ext. 1115.(e-mail [ilazaro@zeus.umich.mx](mailto:ilazaro@zeus.umich.mx))

Con la incorporación de cargas electromecánicas dinámicas, como son los motores de inducción, pueden resultar difíciles de estudiar a través de la primera alternativa, por el hecho de que su transitorio puede durar varios segundos o minutos. De igual forma utilizando la segunda opción, solo se tiene el estado del sistema en un punto de operación en particular (estado estable).

Lo anterior pone de manifiesto, la necesidad de una herramienta de estado quasi-estacionario, que permita el análisis de sistemas eléctricos con cargas dinámicas, donde se encuentren presentes fenómenos electromecánicos. Por lo tanto utilizando la segunda opción y tomando como base las series de Fourier se puede lograr una herramienta capaz de estudiar tales circuitos.

Si bien es cierto que los estudios dinámicos de cualquier sistema se pueden obtener a través de su modelo descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, la incorporación de nuevos elementos al sistema podría ocasionar modificaciones en las ecuaciones, por lo que difícilmente se tendría una generalización y resultaría impráctico su análisis, a pesar de que se tratara del mismo elemento pero ubicado en diferente lugar.

Por otro lado, la generalización del uso de los motores en el sector industrial y de servicios, así como el incremento del uso de cargas sensibles a las depresiones de voltaje, ponen de manifiesto el interés constante del estudio del motor conectado a los sistemas de potencia, ya que se ha demostrado que son uno de los principales elementos que producen estas depresiones [1], [2] y [3].

En este trabajo, se extiende el uso del DAE a problemas de análisis de estado quasi-estacionario, ya que el DAE fue diseñado para análisis de problemas de calidad de la energía. La técnica desarrollada se aplica en el estudio de sistemas eléctricos de potencia, que pueden incorporar en sus nodos dispositivos no lineales con un comportamiento dinámico, tal como el motor de inducción en su régimen transitorio. La técnica esta basada en el DAE [4], cuya principal ventaja es la obtención de una herramienta computacional generalizada capaz de resolver sistemas con las características antes mencionadas. Posteriormente, se describen las ecuaciones del motor de inducción bajo la técnica del DAE. Finalmente, se presenta un caso de estudio, donde se realiza el análisis del comportamiento del voltaje del nodo de prueba del sistema, así como algunos parámetros del motor. Los resultados en simulación se comparan con los obtenidos de

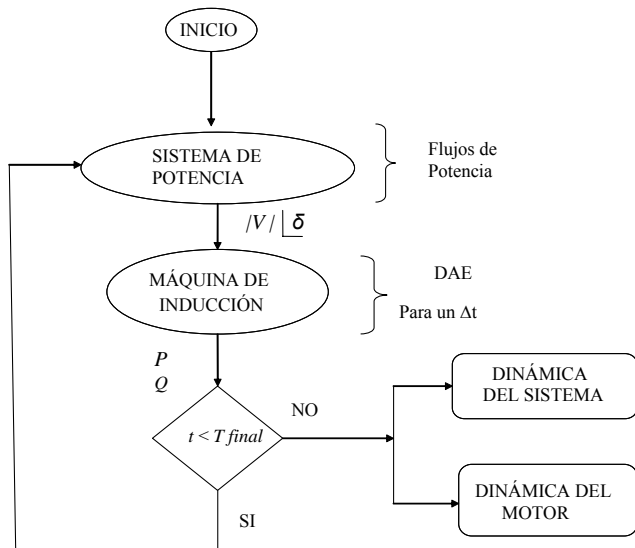


Fig. 1. Metodología de análisis.

un programa alterno realizado en Simulink, mismo que facilita un bloque prefabricado de la máquina de inducción.

## II. METODOLOGÍA

La técnica desarrollada para el análisis de sistemas eléctricos con cargas dinámicas en estado quasi-estacionario, por una parte, utiliza el método de flujos de potencia para observar el estado del sistema ante una condición de carga en particular, mientras que el comportamiento de la carga ante una excitación particular del sistema se realiza mediante el DAE. Por otro lado, como la carga es dinámica, entonces se realiza el proceso iterativo entre la condición que el sistema proporciona a la carga y ésta a su vez al sistema. La figura 1 muestra un diagrama esquemático alusivo a tal proceso iterativo, el cual presenta como carga un motor de inducción en régimen transitorio. Los pasos que hacen referencia a la figura 1, se describen a continuación:

- i) Calcular el estado de operación del sistema eléctrico, con la ayuda de un programa de flujos de potencia convencional, esto con la finalidad de obtener el voltaje (magnitud  $|V|$  y ángulo  $\delta$ ), el cual servirá como excitación para el motor durante un instante de tiempo.
- ii) Con el voltaje calculado en el paso i), se debe simular la dinámica del motor de inducción, para un pequeño instante de tiempo, usando para ello el DAE.
- iii) En base al voltaje de alimentación y los resultados de las corrientes demandadas por el motor se calculan las demandas de potencia activa ( $P$ ) y reactiva ( $Q$ ), las cuales corresponden al instante de tiempo simulado.
- iv) Con las potencias calculadas, se actualizan las demandas de potencia en el nodo de conexión y se continúa con el paso i).

Este procedimiento se repite hasta que se concluya el periodo de estudio seleccionado. De los resultados obtenidos se puede observar por parte del sistema de potencia: el nivel de voltaje en cada uno de sus nodos, información que es útil para la detección de depresiones de voltaje. Mientras que del

motor de inducción algunos de los parámetros observables son: corriente en el estator, así como el comportamiento dinámico de las componentes armónicas que la integran, tales como: velocidad del motor, potencia demandada del sistema (Real y Reactiva), características par-velocidad entre otras.

## III. DOMINIO ARMÓNICO EXTENDIDO

El Dominio Armónico Extendido, es una metodología de propósito general, constituye una alternativa de solución para cualquier sistema descrito a través de ecuaciones de estado. Esta metodología en su formulación básica utiliza las cualidades de las series ortogonales, el concepto de fasores dinámicos, así como las matrices operacionales. A continuación se presenta una breve descripción de las herramientas utilizadas.

### A. Series ortogonales

Cualquier función  $f(t)$  que es absolutamente integrable en el intervalo  $[0,1)$ , puede ser representada aproximadamente por una serie o combinación lineal de  $m$  términos ortogonales como:

$$f(t) = \sum_0^{m-1} a_i T_i(t) \quad (1)$$

Donde  $T_i(t)$  son los elementos de la función base asociada descrita en términos generales por (2), donde  $T$ , indica la transpuesta.

$$\mathbf{T}(t) = [T_0(t) \ T_1(t) \ \dots \ T_{m-1}(t)]^T \quad (2)$$

Y los coeficientes  $a_i$  de la serie se determinan por:

$$a_i = \int_0^1 T_i(t) f(t) dt \quad (3)$$

Cabe señalar que la aproximación depende del número de términos tomados para cada serie.

### B. Fasores dinámicos

Un fasor es un número complejo que contiene magnitud y ángulo de fase, se aplica en la representación de funciones en el tiempo. Cuando se hacen aproximaciones mediante una serie ortogonal en particular, el coeficiente de la serie es de magnitud invariante, por lo que la magnitud del fasor que se forma es constante. Si la aproximación se lleva a cabo desplazando el inicio de la ventana de integración un tiempo  $t$ , quedando el intervalo  $[t, t+1]$ , donde  $l$  es el periodo de la función y  $t$  varía de 0 hasta un tiempo determinado, entonces (3) se convierte en un fasor dinámico dentro del intervalo considerado que se escribe como:

$$a_i(t) = \frac{1}{l} \int_t^{t+l} T_i(\tau) f(\tau) dt \quad (4)$$

Por lo tanto, la aproximación de funciones mediante series ortogonales, representada ahora con fasores dinámicos se expresa como:

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(t) T_i(\tau) dt \quad (5)$$

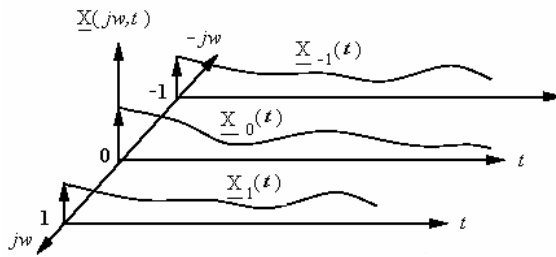


Fig. 2. Componentes armónicos variantes en el tiempo.

Escribiendo (5) en forma matricial se obtiene:

$$f(\tau) = A(t)\mathbf{T}(\tau) \quad (6)$$

donde:

$$A(t) = [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \cdots \quad \alpha_{m-1}(t)] \quad (7)$$

$$\mathbf{T}(\tau) = [T_0(t) \quad T_1(t) \quad \cdots \quad T_{m-1}(t)]^T \quad (8)$$

En la figura 2 se muestra la variación de los armónicos en el tiempo de una señal arbitraria. Se aprecia que la señal esta formada por la componente de frecuencia cero y la fundamental o primera armónica. Esta variación se logra obteniendo los coeficientes armónicos de la señal, mediante un barrido a través de una ventana fija, hasta concluir con el periodo seleccionado. Una mayor referencia de lo anterior esta documentada en [5], [6], [7] y [8].

### C. Matrices Operacionales

Son consideradas como matrices operacionales la matriz de Integración ( $\mathbf{P}$ ) y la de Diferenciación ( $\mathbf{D}$ ), las cuales con ayuda de matrices auxiliares como son la matriz Producto

( $\hat{\mathbf{T}}$ ) y de Coeficientes ( $\mathbf{C}$ ), permiten realizar el cálculo operacional. La principal ventaja de las matrices operacionales, es la conversión de un sistema de ecuaciones diferenciales a un sistema de ecuaciones algebraicas, simplificando así el problema para el análisis y/o control. En [9], se encuentra una definición clara de cada una de éstas en diferentes dominios.

$$\int_0^t \mathbf{T}(\tau) d\tau \cong \mathbf{P}\mathbf{T}(t) \quad (9)$$

$$p(\mathbf{T}(t)) \cong \mathbf{D}\mathbf{T}(t) \quad (10)$$

donde:  $p = \frac{d}{dt}$

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^T(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{T}(t) = \left[ \hat{\mathbf{T}}(t) \right] \mathbf{c} \quad (12)$$

Donde  $c$  es el vector de coeficientes armónicos obtenido en la aproximación de una función en particular.

### D. Formulación del DAE para Sistemas Lineales

La formulación general del DAE para Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (SLIT) y Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (SLVT), puede ser descrita considerando un sistema lineal de primer orden con

coeficientes periódicos en el tiempo, donde en general estos sistemas están dados por (13), donde la parte esencial a considerar es la aproximación a través de fasores dinámicos de una función cuyo comportamiento es periódico, es decir  $f(t) = f(t+l)$ .

$$p(x(t)) = a(t)x(t) + b(t)u(t) ; \quad x(0) = x_0 \quad (13)$$

Así, utilizando la idea de fasores dinámicos en los términos de (13), se tiene:

$$x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t) \quad (14)$$

y aplicando la derivada a (14) se tiene:

$$p(x(t)) = p(\mathbf{T}^T(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(t)p(\mathbf{x}(t)) \quad (15)$$

y usando (10) se llega a:

$$p(x(t)) = \mathbf{T}^T(t)\mathbf{D}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(t)p(\mathbf{x}(t)) \quad (16)$$

Por otro lado aplicando la idea de fasores dinámicos al coeficiente periódico  $a(t)$ , se tiene:

$$a(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (17)$$

por lo tanto el producto  $a(\tau)x(\tau)$ , queda como:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t) \quad (18)$$

como  $\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t)$  representa un escalar, entonces:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{x}(t)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (19)$$

Además, la transpuesta de un escalar sigue siendo el mismo escalar, se tiene que:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (20)$$

Aplicando (11), la ecuación (20) se transforma en:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\hat{\mathbf{T}}(\tau)\mathbf{a}(t) \quad (21)$$

Finalmente aplicando (12) en (21) se obtiene:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}\mathbf{T}(\tau) \quad (22)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de coeficientes constantes y todo el lado derecho de (22) es un escalar, por lo tanto se puede reescribir como:

$$a(\tau)x(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) \quad (23)$$

Si siguiendo el mismo procedimiento para el producto  $b(t)u(t)$ , se obtiene: que el lado derecho de (13) es:

$$a(t)x(t) + b(t)u(t) = \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^T(\tau)\mathbf{B}^T\mathbf{u}(t) \quad (24)$$

Obsérvese que sustituyendo (15) y (24) en (13), se puede eliminar la dependencia del tiempo, resultando la ecuación como:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(t) + p(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{u}(t) \quad (25)$$

por lo tanto acomodando la expresión se obtiene:

$$p(\mathbf{x}(t)) = [\mathbf{A}^T - \mathbf{D}]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_{k0} \quad (26)$$

La ecuación (26), representa a un sistema lineal invariante en el tiempo en un nuevo espacio de estado, cuya solución proporcionan la información completa del comportamiento de las armónicas en el tiempo de las variables de estado y está contenida en el vector  $\mathbf{x}(t)$ .

TABLA I. CONSTANTES DEL MOTOR

$a_{11} = \frac{r_s L_r}{\alpha_0} = a_{22}$	$a_{12} = \frac{M^2}{\alpha_0} = -a_{21}$	$a_{13} = -\frac{r'_r M}{\alpha_0} = a_{24}$
$a_{14} = \frac{M L_r}{\alpha_0} = -a_{23}$	$a_{31} = -\frac{r_s M}{\alpha_0} = a_{42}$	$a_{32} = -\frac{M L_s}{\alpha_0} = -a_{41}$
$a_{33} = \frac{r'_r L_s}{\alpha_0} = a_{44}$	$a_{34} = -\frac{L_s L_r}{\alpha_0} = -a_{43}$	$a_{51} = \frac{3 n_{pol}^2 M}{8J} = -a_{53}$
$b_{11} = -\frac{L_r}{\alpha_0} = b_{21}$	$b_{31} = \frac{M}{\alpha_0} = b_{41}$	$b_{51} = -\frac{4 n_{pol}}{8J}$

Por otro lado, el producto de tres funciones arbitrarias en el espacio armónico puede obtenerse siguiendo un procedimiento similar al anterior, a partir del cual se obtiene:

$$a(\tau)x(\tau)y(\tau) = \mathbf{T}^T(\tau) \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}(t) \quad (27)$$

#### IV. MOTOR DE INDUCCIÓN EN TÉRMINOS DEL DAE

El modelo matemático que describe el comportamiento del motor de inducción esta dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales (28-32), donde  $p$  es la derivada respecto al tiempo, los subíndices  $s, r$ , hacen referencia a los parámetros del estator y rotor respectivamente y los parámetros del rotor vistos en terminales del estator se indica con  $(\cdot)$ . Este modelo tiene como variables de estado las corrientes y la velocidad del rotor, en un marco de referencia estacionario de coordenadas  $dq0$  ( $\omega = 0$ ,  $i_{0s} = 0$ ,  $i'_{0r} = 0$ ,  $v_{0s} = 0$ ) y es una simplificación del modelo presentado en [10].

$$p(i_{qs}) = a_{11}i_{qs} + a_{12}i_{ds}\omega_r + a_{13}i'_{qr} + a_{14}i'_{dr}\omega_r + b_{11}v_{qs} \quad (28)$$

$$p(i_{ds}) = a_{21}i_{qs}\omega_r + a_{22}i_{ds} + a_{23}i'_{qr}\omega_r + a_{24}i'_{dr} + b_{21}v_{ds} \quad (29)$$

$$p(i'_{qr}) = a_{31}i_{qs} + a_{32}i_{ds}\omega_r + a_{33}i'_{qr} + a_{34}i'_{dr}\omega_r + b_{31}v_{qs} \quad (30)$$

$$p(i'_{dr}) = a_{41}i_{qs}\omega_r + a_{42}i_{ds} + a_{43}i'_{qr}\omega_r + a_{44}i'_{dr} + b_{41}v_{ds} \quad (31)$$

$$p(\omega_r) = a_{51}i_{qs}i'_{dr} + a_{52}i_{ds}i'_{qr} + b_{51}T_L \quad (32)$$

Donde las constantes  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  están dadas por la tabla I. donde:

$$\alpha_0 = M^2 - L_s L_r \quad (33)$$

Los símbolos  $r, n_{pol}, J, M, L, T_L$  representan a la resistencia de los devanados, número de polos, momentos de inercia, inductancia mutua, la inductancia de los devanados y

el par de carga, respectivamente. Los subíndices  $s$  y  $r$ , hacen la distinción entre los parámetros del estator y el rotor.

Al aplicar el principio de la aproximación de funciones a través de los fasores dinámicos, así como de los operadores matriciales, el conjunto de ecuaciones (28-32), se transforma en (34,38).

$$p(\mathbf{i}_{qs}) = (\mathbf{A}_{11}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}_{qs} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{i}_{ds} + \mathbf{A}_{13}^T \mathbf{i}'_{qr} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{14}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{11}^T \mathbf{v}_{qs} \quad (34)$$

$$p(\mathbf{i}_{ds}) = \varpi_r^T \mathbf{A}_{21}^T \mathbf{i}_{qs} + (\mathbf{A}_{22}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}_{ds} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{23}^T \mathbf{i}'_{qr} + \mathbf{A}_{24}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{21}^T \mathbf{v}_{ds} \quad (35)$$

$$p(\mathbf{i}'_{qr}) = \mathbf{A}_{31}^T \mathbf{i}_{qs} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{32}^T \mathbf{i}_{ds} + (\mathbf{A}_{33}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}'_{qr} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{34}^T \mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{31}^T \mathbf{v}_{qs} \quad (36)$$

$$p(\mathbf{i}'_{dr}) = \varpi_r^T \mathbf{A}_{41}^T \mathbf{i}_{qs} + \mathbf{A}_{42}^T \mathbf{i}_{ds} + \varpi_r^T \mathbf{A}_{43}^T \mathbf{i}'_{qr} + (\mathbf{A}_{44}^T - \mathbf{D})\mathbf{i}'_{dr} + \mathbf{B}_{41}^T \mathbf{v}_{ds} \quad (37)$$

$$p(\boldsymbol{\omega}_r) = \mathbf{I}'_{dr}^T \mathbf{A}_{51}^T \mathbf{i}_{qs} + \mathbf{I}'_{qr}^T \mathbf{A}_{52}^T \mathbf{i}_{ds} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}_r + \mathbf{B}_{51}^T \mathbf{T}_L \quad (38)$$

El conjunto (34-38), representan al modelo del motor de inducción en términos del DAE, donde la solución de éste sistema de ecuaciones, muestra el comportamiento dinámico de los armónicos en el tiempo para cada una de las variables de estado. Por lo tanto para ver el valor de las variables de estado, se deben multiplicar los resultados anteriores por las funciones base. Por otro lado, las matrices  $\mathbf{A}_{mk}^T = a_{mk} \mathbf{I}$ , son de coeficientes constantes y de tamaño  $[2nh+1 \times 2nh+1]$ , donde  $\mathbf{I}$ , es una matriz identidad y  $nh$  es el número de armónicas seleccionadas para la aproximación vía series de Fourier. En este caso también  $\mathbf{T}_L$  representa un vector, mientras que  $\varpi_r$ , es una matriz de coeficientes formada con las componentes armónicas del vector de velocidad  $\boldsymbol{\omega}_r$ . Finalmente, las matrices de coeficientes de las variables de estado de las corrientes y la velocidad, deben calcularse para cada instante de tiempo en el que se obtiene la solución, siendo éstas constantes sólo hasta el estado estable.

Utilizando los voltajes de alimentación y los resultados de las corrientes, el cálculo de potencia demandada por el motor de inducción y en general de cualquier carga se realiza mediante [11] y [12]:

$$P = \sum_{m=-nh}^{nh} V_m I_{-m} \quad (39)$$

$$Q = \sqrt{\sum_{m=-nh}^{nh} (|V_m|^2 |I_m|^2 - V_m I_{-m} V_m I_{-m})} \quad (40)$$

Donde el voltaje y corriente están en el dominio armónico y  $nh$  es el número de coeficientes de Fourier seleccionados.

#### V. CASO DE ESTUDIO

En este apartado se muestra un caso de estudio de un sistema de potencia donde se le conectan dos diferentes motores de inducción en uno de sus nodos, la aproximación con el DAE se realiza con sólo la componente de CD y la

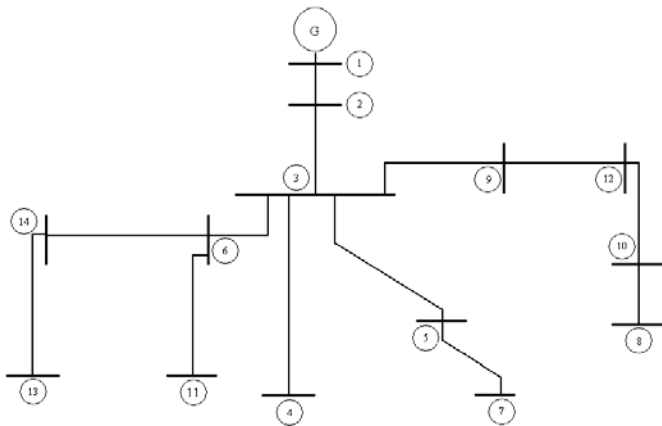


Fig. 3 Sistema eléctrico de prueba.

TABLA II. DATOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO DE PRUEBA.

Nodo emisor	Nodo receptor	Impedancia serie $Z_{serie}$		$Y_p/2$ , pu	Tap
		$R$ , pu	$X$ , pu		
1	2	0.001510	0.002960	0	1
2	3	0.006670	0.005330	0	1
3	9	0.004440	0.001610	0	1
3	5	0.007000	0.000908	0	1
3	4	0.014600	0.001900	0	1
3	6	0.002570	0.001130	0	1
5	7	0.046400	0.348000	0	1
6	11	0.458000	0.367000	0	1
6	14	0.018900	0.005760	0	1
10	8	0.058200	0.024300	0	1
9	12	0.003550	0.000461	0	1
12	10	0.529000	0.450000	0	1
14	13	0.024400	0.147000	0	1

TABLA III. DATOS DEL SISTEMA ELÉCTRICO; TIPO DE NODO, POTENCIA GENERADA Y DEMANDADA EN P.U.

Núm. Nodo	Tipo de Nodo	$P_g$ , pu	$Q_g$ , pu	$P_d$ , pu	$Q_d$ , pu
1	S	1.60	1.00	0.0000	0.0000
2	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
3	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
4	C	0.00	0.00	0.0001	0.0005
5	C	0.00	0.00	0.2000	0.4000
6	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
7	C	0.00	0.00	0.0015	0.0085
8	C	0.00	0.00	0.0200	0.0070
9	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
10	C	0.00	0.00	0.0120	0.0007
11	C	0.00	0.00	0.0125	0.0080
12	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000
13	C	0.00	0.00	0.0320	0.0019
14	C	0.00	0.00	0.0000	0.0000

TABLA IV. PARÁMETROS DE LOS MOTORES DE INDUCCIÓN.

PARÁMETRO	MOTOR DE INDUCCIÓN	
	3 Hp	2250 Hp
Voltaje [V]	220	2300
Velocidad [rpm]	1710	1786
Par Base [Nm]	11.9	8900
Corriente Base [A]	5.8	421.2
Resistencia estatórica [ $\Omega$ ]	0.435	0.029
Resistencia Rotatórica [ $\Omega$ ]	0.816	0.022
Resistencia de fuga Estatórica [ $\Omega$ ]	0.754	0.226
Resistencia de fuga Rotatórica [ $\Omega$ ]	0.754	0.226
Reactancia de Magnetización [ $\Omega$ ]	26.13	13.04
Constante de Inercia $J$ [ $\text{kgm}^2$ ]	0.089	63.87

fundamental. El sistema de prueba es una red de 14 nodos representada por la figura 3.

La tabla II muestra la información de los parámetros de las líneas del sistema, expresados en valores en por unidad (p.u.), con una base de 10 MVA.

En la tabla III, se muestra la información del tipo de nodo del sistema, así como las potencias demandadas e inyectadas al sistema, dadas en por unidad. Donde la letra S indica que el nodo es un nodo compensador, mientras que la C manifiesta que se trata de un nodo de carga. Por otro lado, los parámetros de los motores de inducción que se conectarán al sistema están reportados en la tabla IV.

En el primer caso de estudio se coloca en el nodo 5 del sistema de eléctrico un motor de inducción de 3HP. El motor inicialmente se encuentra estático y se le coloca una carga mecánica en su eje, equivalente a 10 Nm. Para la solución del motor vía DAE se utilizan 3 armónicas y el número de términos con considerados para el muestreo de la señal son  $mt = 64$ . La figura 4, muestra una comparación del

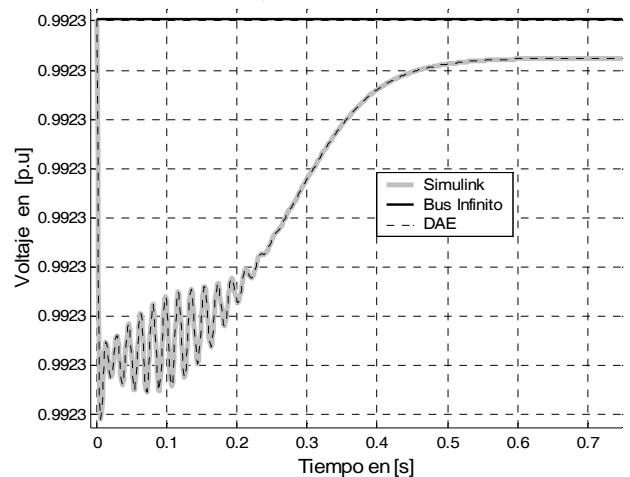


Fig. 4. Voltaje del sistema con un motor de 3 HP.

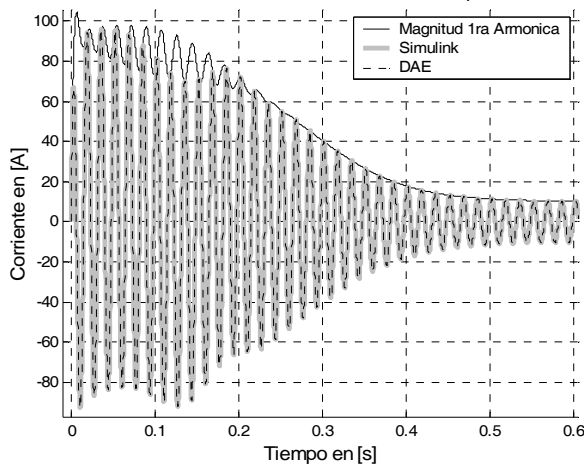


Fig. 5. Corriente demandada por el motor de 3 HP.

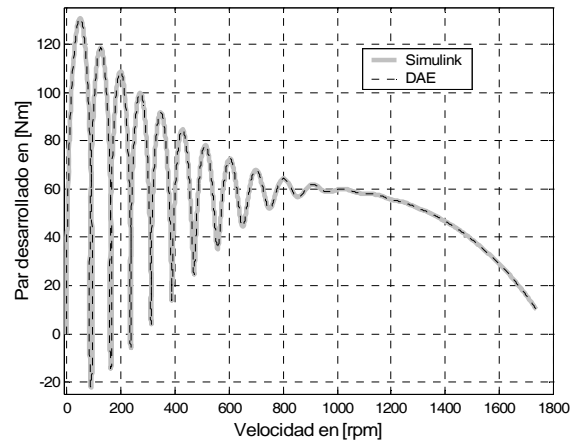


Fig. 7. Curva par-velocidad con una carga de 10 Nm.

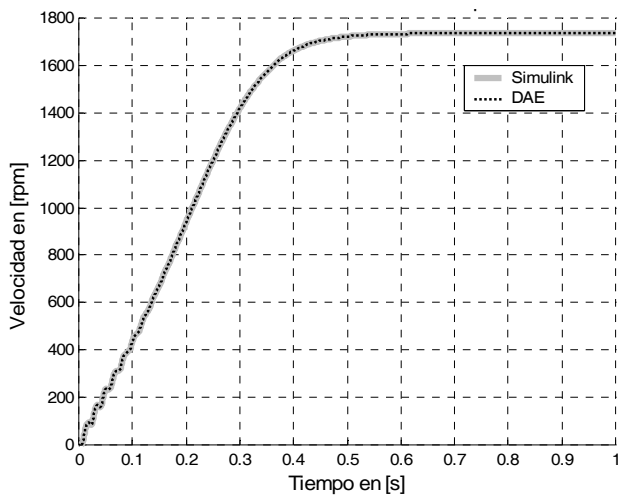


Fig. 6. Velocidad del motor con una carga de 10 Nm.

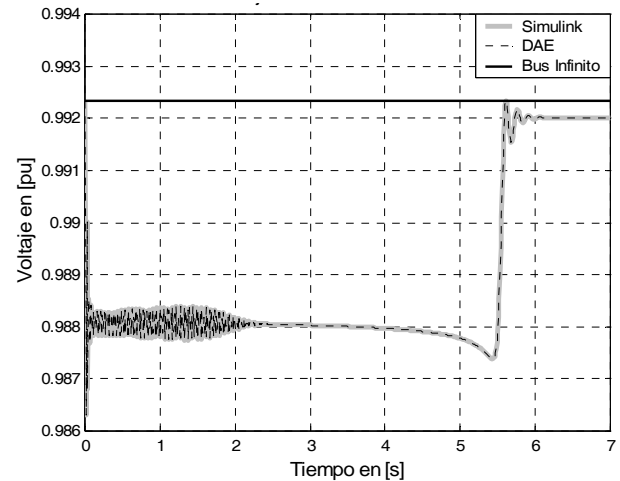


Fig. 8. Magnitud del voltaje en el nodo 5 al colocar un motor de 2250HP, con una carga  $T_L=2000Nm$ .

comportamiento del voltaje en el nodo 5 del sistema con su valor nominal (Bus infinito), ante la conexión de dicho motor. Se observa que la caída de voltaje ocasionada por la conexión de este motor, no tiene gran significado, prácticamente es despreciable.

Por otro lado, la corriente que el motor esta demandando del sistema, se puede apreciar en la figura 5, donde además de la técnica del DAE se logra observar el comportamiento de la magnitud de la componente fundamental que participa en la formación de esta señal, donde se aprecia que es prácticamente su envolvente, por lo que la participación de las demás componentes (cd, 2da, 3ra, etc.) es prácticamente nula.

En la figura 6, se presenta el comportamiento de la velocidad del motor, en donde se puede observar que la curva arrojada por la técnica del DAE es prácticamente la misma que la obtenida al utilizar el bloque prefabricado del MatLab®.

Por otro lado en la figura 7, muestra la característica del par desarrollado en función de la velocidad del motor, nuevamente las diferencias entre los resultados es mínima.

Como segundo caso de estudio, se considera el nodo 5 como el de prueba, pero ahora se conecta un motor de

inducción de 2250 HP, donde los parámetros para este motor son los mostrados en la tabla IV. La carga mecánica conectada al eje del motor es de 2000 Nm, para la simulación se consideran las 3 primeras componentes armónicas, además de utilizar  $mt=64$  para la solución.

La figura 8, muestra las características del voltaje en el nodo 5, donde se puede observar que el voltaje del sistema sufre una depresión de voltaje que por un instante de tiempo llega a un valor de 0.986 p.u, misma que por las características de operación del motor se mantiene a un voltaje de operación de aproximadamente 0.988 p.u.; una vez que el motor alcanza su velocidad nominal el voltaje en el sistema se recupera hasta prácticamente el voltaje inicial.

En la figura 9 se muestra la corriente del estator junto con su envolvente, la cual esta formada por la componente fundamental, en donde se puede apreciar que durante todo el transitorio la corriente es una senoide de valor pico aparentemente constante, lo que pone al motor en condiciones críticas de operación, así mismo, se observa que el motor llega al estado estable en el tiempo en el cual se recupera el voltaje.

La figura 10, muestra el comportamiento de la velocidad para estas condiciones de operación. Obsérvese nuevamente



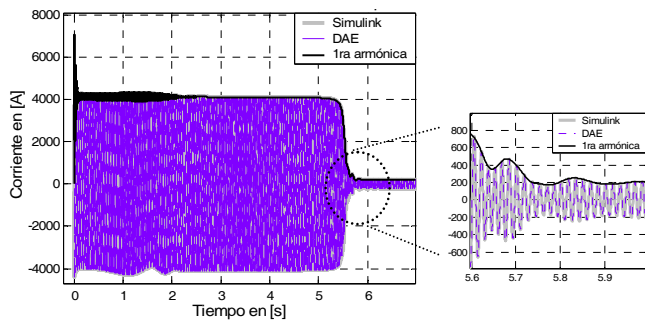


Fig. 9. Corriente del estator del motor de 2250HP, con  $T_L = 2000Nm$ , conectado al nodo 5 del SEP.

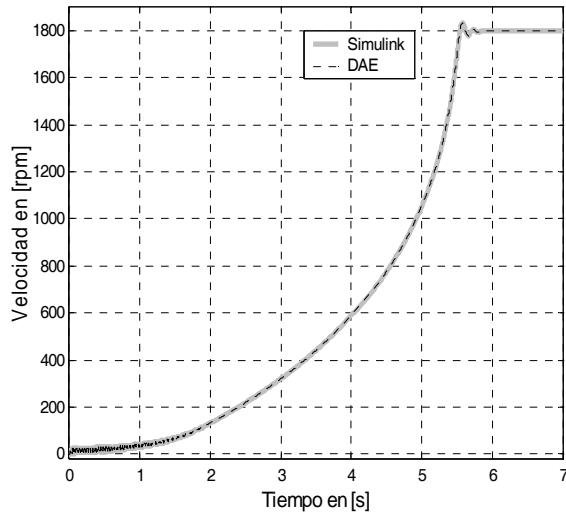


Fig. 10. Velocidad de un motor de 2250HP con  $T_L = 2000Nm$ ,

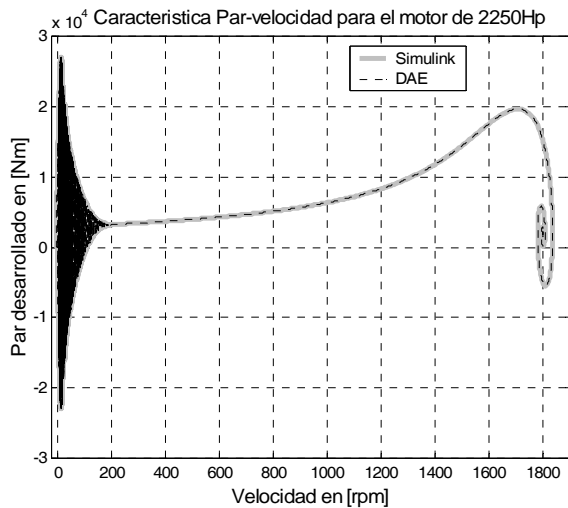


Fig. 11. Par-velocidad del motor de inducción de 2250HP, con  $T_L = 2000Nm$ , conectado al nodo 5 del SEP.

que el tiempo en que el motor llega al estado estable coincide con el tiempo en el cual se recupera el voltaje. En la figura 11 muestra el comportamiento del par en función con la velocidad, se observa que para algunos valores del par, la velocidad está por encima de la velocidad de sincronía, esto puede llegar a suceder en motores de gran capacidad y se atribuye a la inercia de la masa del rotor.

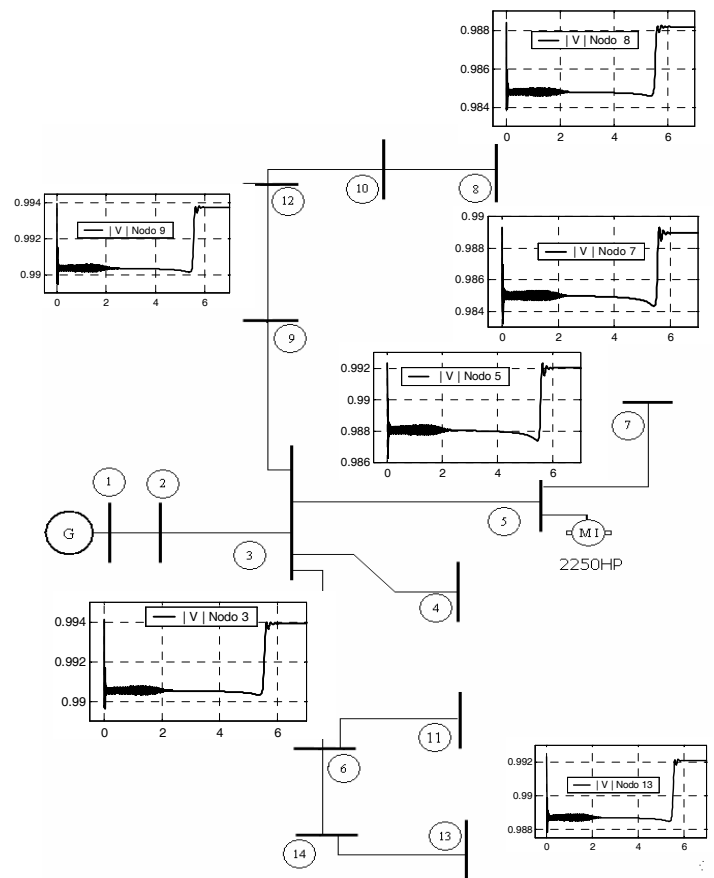


Fig. 12. Voltajes nodales en pu, ante un motor de 2250HP con  $T_L = 2000Nm$  conectado en el nodo 5.

Finalmente, en la figura 12 se presenta el voltaje del sistema en algunos de sus nodos con la finalidad de observar la propagación de las depresiones.

## VI. CONCLUSIONES

En este artículo se muestra una técnica basada en series de Fourier para estudiar el impacto de motores de gran capacidad en redes eléctricas de distribución. El modelo considera que las ecuaciones del motor de inducción sean representadas en el dominio armónico extendido, donde las variables de estado son los coeficientes de Fourier dependientes del tiempo de las variables de estado en la formulación convencional en coordenadas dq0. Una característica sobresaliente de esta transformación es que las variables de estado en el dominio armónico extendido evolucionan más lentamente que las variables de estado en las coordenadas dq0. Esto permite eficientar los métodos de integración numérica utilizados en nuestra propuesta. Por ejemplo, es posible utilizar pasos de integración mayores reduciendo el costo computacional. En el modelo propuesto la red de distribución es analizada mediante flujos monofásicos pero el modelo puede incorporar la formulación trifásica sin mayores esfuerzos.

Los resultados obtenidos con las técnicas propuestas muestran coincidencia con modelos convencionales. En este

caso nuestro modelo ha sido validado con los modelos del motor de inducción proporcionados en Simulink MatLab ®.

### REFERENCIAS

- [1] K.H. Chan, M. Madrigal, "Phase Domain Analysis of Conventional and Advanced Static Var Compensator in Voltage Sag due to Motor Start-Up", *Power and Energy Systems*, July 2001, pp. 394-400.
- [2] J. Cardona, J. P. Barros, "ATP Prediction of Voltage Sag Effect on Sensitive Loads", presented at the 2006 International Conference on renewable energy and power quality, ICREPQ'06, Palma de Mallorca, España.
- [3] J. J. Perez, C. A. Cortes, A. Gomez, "A study of voltage sags in electric motors", presented at the 9th International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation. EPQU 2007, Barcelona, España.
- [4] J. J. Rico, M. Madrigal and E. Acha, "Dynamic Harmonic Evolution Using the Extended Harmonic Domain", *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 18, No 2, pp. 587-594, April 2003.
- [5] B. Grčar, M. Žnidarič, A.M. Stanković, "Dynamic Phasors in Power System Analysis and Protection Design", presented at the 12-th Intl. Conf. on Power System Protection PSP2000, Bled, Slovenia, Sep. 2000, pp. 207-212.
- [6] A. M. Stankovic, B. C. Lesieutre T. Aydin, "Modeling and Analysis of Single-Phase Induction Machines with Dynamic Phasors", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 14, No. 1 February 1999.
- [7] J. Maldonado, "Análisis del Arranque de Motores de Inducción de Gran Capacidad Conectados a Redes de Distribución usando el Dominio Armónico Extendido", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica UMSNH, Octubre 2005.
- [8] W. Yao, J. Wen and H. He, "Modeling and Simulation of VSC-HVDC with Dynamic Phasors", presented at the Third International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies, Nanjing, China, April 6-9, 2008, DRPT2008.
- [9] I. Lázaro, J. J. Rico, G. T. Heydt, "Analysis of Switching Loads in Networks Using Operacional Matrices", *IEEE Power Review*, Vol. 20, Num. 3, March 2000.
- [10] P. C. Krause, *Análisis of Electric Machinery*, IEEE Press, New York, 1995.
- [11] E. Acha, M. Madrigal, *Power Systems Harmonics, Computer Modelling and Analysis*, John Wiley & Sons, 2001.
- [12] M. Madrigal, "Modelling of Power Electronics Controllers for Harmonics Analysis in Power Systems", Ph. D thesis, University of Glasgow, Scotland, U.K., 2001.



**Isidro Ignacio Lázaro Castillo** nació en Córdoba, Veracruz, México. Recibió el grado de Ingeniero Electricista en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el grado de maestro en Ingeniería Eléctrica en la misma Institución en 1992 y 1999 respectivamente. Actualmente es Profesor Investigador de tiempo completo de la misma Facultad. Ha publicado varios artículos científicos y técnicos en congresos nacionales, internacionales y revistas. Autor del libro Ingeniería de Sistemas de Control Continuo. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Electrónica de Potencia, Control e Instrumentación.



**Jesús Maldonado Paleo** nació en Uruapan Michoacán, México. Recibió el grado de Ingeniero Electricista en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el grado de maestro en Ingeniería Eléctrica en la misma Institución en 2002 y 2005. Actualmente labora como profesor en el sector educativo. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Control e Instrumentación.



**J. Jesús Rico Melgoza** nació en Purépero, Michoacán, México. Recibió el grado de Ingeniero Electricista en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Nuevo León y el Grado de Doctor en al Universidad de Glasgow en 1990, 1993 y 1997 respectivamente. En 1999 realizó una estancia postdoctoral en la Universidad Estatal de Arizona. Actualmente es Profesor Investigador del Programa de Graduados de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH. Sus áreas de interés son Calidad de la Energía, Armónicas, Análisis e Identificación de Parámetros.



# **RIEE&C**

**Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación**

**AGRADECE AL GRUPO DE REVISORES QUE COLABORARON  
EN LA PRESENTE EDICIÓN**

**Adolfo Soto Cota  
Ernesto Vázquez Martínez  
Freddy Chan Puc  
Jesús Héctor Hernández López  
José Luis Vázquez Ávila  
José Rivera Mejía  
Juan Anzures Marín  
Manuel May Alarcón  
Rafael Sánchez Lara  
Raymundo Márquez Borbón  
Ricardo Chaparro Sánchez  
Rodrigo Montiel Uribe  
Saúl Reyes Godinez**



# RIEE&C

## Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación

### INVITACIÓN A FORMAR PARTE DEL COMITÉ REVISOR

El Instituto Tecnológico de Sonora a través del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica pone en marcha la Revista RIEE&C (ISSN: 1870-9532) con el fin de coadyuvar a la difusión científica y cultural en el país en las áreas de Electrónica, Eléctrica y Sistemas Computacionales. RIEE&C es un espacio donde se pueden publicar resultados científicos y de desarrollo tecnológico tanto para investigadores como para estudiantes de nivel superior.

En esta revista se publican artículos de investigación con resultados originales y deseamos que dichos artículos estén sujetos a un estricto arbitraje realizado por investigadores líderes en su especialidad, adscritos a instituciones nacionales y extranjeras. Lo anterior con el objetivo de ser incluida en el índice de revistas reconocidas por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT.

Por lo anterior le hacemos una cordial invitación para que forme parte del grupo de revisores de la revista RIEE&C. En busca de indexarse, RIEE&C crea un expediente de cada uno de sus revisores, por lo que en caso de aceptar la invitación, se le solicita envíe su currículum vitae así como una copia de la cédula profesional o copia del título del máximo grado académico obtenido. Es importante que su currículum contenga datos como:

- Número de cédula profesional.
- Grado académico.
- Áreas de interés.
- Centro de trabajo.

Estos datos deberán ser enviados a la dirección de correo electrónico [rieecandc@itson.mx](mailto:rieecandc@itson.mx). También le invitamos a conocer nuestra página electrónica en la dirección <http://www.itson.mx/rieecandc>.

Atentamente

---

José Antonio Beristáin Jiménez  
Editor en Jefe de la RIEE&C  
Instituto Tecnológico de Sonora  
Departamento de Ing. Eléctrica y Electrónica



# **RIEE&C**

**Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación**

## **INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES**

RIEE&C, Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación (ISSN: 1870-9532) se publica semestralmente. Se aceptan artículos originales en aplicaciones de la ciencia, desarrollo de nueva tecnología o soluciones eficientes de ingeniería, siempre y cuando no hayan sido publicados o estén bajo consideración para publicarse en alguna otra revista.

Todos los documentos deberán enviarse al editor en jefe de RIEE&C, José Antonio Beristáin Jiménez, por e-mail a: [rieandc@itson.mx](mailto:rieandc@itson.mx)

Los artículos se revisarán por especialistas en el área y dictaminarán si el artículo es apropiado para su publicación. No se deberán enviar manuscritos directamente a los editores asociados.

Los manuscritos enviados por los autores deberán seguir el formato que muestra la guía para el autor, la cual se encuentra en la página de internet <http://www.itson.mx/rieandc>.

## Contenido

**An Efficient Architecture for Detection of Linear Dispersion Space-Time Codes Based on QR Decomposition.**

Cortéz G. Joaquín, Pizarro L. Andrés O. and Domitsu K. Manuel

1

**Estabilidad de Sistemas No-lineales: Sistema de Nivel de Líquido de Dos Tanques Interconectados.**

Anzures M. Juan, Padilla G. José A. y Cuevas S. Omar

6

**Aplicación del Dominio Armónico Extendido al Análisis de Estado Quasi-Estacionario de los Sistemas Eléctricos de Potencia.**

Lázaro C. Isidro, Maldonado P. Jesús y Rico M. Jesús.

13

