

---

## Pronósticos de escurrimientos mensuales mediante distribuciones bivariadas

F. García-Páez<sup>1\*</sup>, I. R. Cruz-Medina<sup>1</sup>, J. Garatuza-Payán<sup>1</sup>, J. C. Douriet-Cárdenas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico de Sonora, 5 de Febrero 818 Sur, Colonia Centro, Cd. Obregón, Sonora, C.P. 85000.

<sup>2</sup>Comisión Nacional del Agua

Recibido 12 Febrero 2009, Revisado 18 Abril 2009, Aceptado 25 Mayo 2009

---

*Monthly runoff forecasts by bivariate distributions*

### Abstract

Forecasting the runoff that enters in a reservoir is very important for water use planning purposes. In this paper, Fuerte river's monthly runoff is studied, which is used to irrigate the valley with the same name in the state of Sinaloa in northern México. Summer's runoffs, due to the Mexican Monsoon, are correlated and represent 85% of the annual Fuerte river's runoff. The objective of this paper is to present a method, which uses the correlation between monthly runoffs to forecast runoff with bivariate distributions. With this purpose a generalization of Moran's bivariate distribution is used, this distribution can be constructed with the marginal distributions of best fit to monthly runoffs (based in statistical criteria). This distribution has the advantage of expressing the dependency between variables by the correlation coefficient.

Runoffs forecasting, in this approach, are obtained with the mean value of the conditional distribution, which in some sense, is a generalization of the simple regression equation. Results show that the conditional mean is better than the forecast given by the regression equation, which is not suitable if variables are not normally distributed.

*Key words:* Generalized Moran's family, marginal distribution, conditional distribution, coefficient of correlation.

### Resumen

Pronosticar los escurrimientos que ingresan en un vaso de almacenamiento, es de gran importancia en la planeación del uso del agua. En este trabajo se analizan los escurrimientos mensuales del río Fuerte, que se utilizan para irrigar el Valle del mismo nombre en el norte de Sinaloa. Los escurrimientos de los meses del verano, ocasionados por las lluvias del Monzón Mexicano, están correlacionados entre sí y representan el 85% de los escurrimientos anuales del río Fuerte. El objetivo de este trabajo es presentar un método para obtener pronósticos por medio de distribuciones bivariadas y el coeficiente de correlación. Para este propósito, se utilizará una generalización de la familia bivariada de Moran, que tiene como marginales a las distribuciones de mejor ajuste (con base en criterios estadísticos) para los escurrimientos mensuales. Esta distribución tiene la ventaja de expresar la dependencia entre variables por medio del coeficiente de correlación.

En el método propuesto, los pronósticos para los escurrimientos se obtienen con la media de la distribución condicional, que en cierta forma generaliza a la ecuación de regresión simple. Se muestra que la media condicional supera al pronóstico proporcionado por la ecuación de regresión, que adicionalmente, no es recomendable si los escurrimientos no son normales.

*Palabras clave:* Familia generalizada de Moran, distribución marginal, distribución condicional, coeficiente de correlación.

---

\* Autor de correspondencia  
E-mail: garpaez@uas.uasnet.mx.

## Introducción

Los pronósticos permiten prever condiciones a futuro, en hidrología existen diversos tipos de pronósticos para los escurrimientos (que son de gran utilidad para la planeación de la utilización de los recursos hídricos): los que utilizan modelos empíricos o de “caja negra”, los modelos conceptuales y los modelos distribuidos.

Los modelos empíricos relacionan la precipitación como ingreso y el escurrimiento como salida del flujo, sin considerar, de manera directa, los procesos hidrológicos involucrados. Los modelos “conceptuales”, por otro lado, intentan simular los mecanismos hidrológicos más importantes que ocurren en la cuenca al llover, esto es, intercepción, evapotranspiración, infiltración, escurrimientos superficiales y subterráneos, usando relaciones matemáticas y heurísticas.

Los modelos “distribuidos”, los más sofisticados, toman en cuenta tanto la distribución de áreas de lluvias como los volúmenes de almacenamiento, sin embargo, estos modelos no son significativamente superiores a modelos más simples (Knight y Shamseldin, 2006).

El objetivo de este trabajo es obtener intervalos de confianza para los escurrimientos mensuales del periodo de verano en el río Fuerte en el norte de Sinaloa, mediante distribuciones bivariadas de probabilidad.

Dos características deseables de una distribución bivariada son: que pueda modelar un amplio rango de asociación y que permita que sus distribuciones marginales tengan cualquier distribución específica (Kelly, 1997). En este caso, la modelación bivariada debe ser precedida de un análisis univariado, en el cual se seleccionan los parámetros de las distribuciones marginales de “mejor” ajuste y se determina la estructura de la dependencia entre las variables.

Kibble en 1941, derivó una densidad bivariada expresada en términos de una función de Bessel modificada cuando sus distribuciones marginales gamma tienen parámetros idénticos, esta característica que limita su aplicación, tiene además una densidad que se expresa por medio de una serie infinita cuya manipulación matemática resulta compleja.

Las densidades bivariadas usadas por Rosbjerg (1987), Choulakian *et al.* (1990) y Warren (1992)

pueden modelar un amplio rango de asociación positiva, medida con el coeficiente de correlación producto-momento de Pearson. Sin embargo, este coeficiente no es una medida eficiente de asociación cuando la regresión entre las variables es no lineal (Farlie, 1960). Se han utilizado distribuciones bivariadas para modelar procesos hidrológicos como: picos de avenidas (Rosbjerg, 1987), duración de avenidas en registros parciales (Choulakian *et al.*, 1990), intensidad y láminas de lluvias (Singh y Singh, 1991) e ingresos de escurrimientos a presas (Warren, 1992). Yue *et al.* (2001), revisan las diversas distribuciones bivariadas que se han propuesto para aplicaciones hidrológicas y mencionan que el principal obstáculo para su uso extendido es su complicación matemática.

Los pronósticos de escurrimientos mensuales en México se han obtenido, dependiendo de la información disponible, mediante modelos de lluvia-escurrimiento, tránsito de avenidas, análisis de regresión, distribuciones de probabilidad y predicción de flujos extendidos, basados en series sintéticas. Para analizar las tendencias temporales en los escurrimientos se ha utilizado el método de Mann-Kendall, que no requiere normalidad en la base de datos y es robusto a la influencia de los valores extremos (Hirsch y Slack, 1984; Helsel y Hirsch, 1992; Sheng *et al.*, 2002). En el análisis de escurrimientos extremos se han utilizado distribuciones univariadas, pero debido a la gran variabilidad en los eventos estimados para ciertos períodos de retorno, cuando se dispone de variables auxiliares, se han introducido distribuciones bivariadas con distribuciones marginales de valores extremos tipo I, que producen menor sesgo que la contraparte univariada (Escalante-Sandoval, 2003).

## Material y métodos

El río Fuerte se encuentra en la Región Hidrológica 10 (INEGI, 1995), inicia aguas abajo de la confluencia de los ríos San Miguel y Batopilas a 1.5 km al norte del poblado de San Ignacio en el estado de Chihuahua. Su longitud es de 310 km y desemboca en el golfo de California, su pendiente media es de 0.13%, y sus afluentes principales son los ríos Urique, Septentrión y Chinipas (INEGI, 1995).

Para pronosticar los escurrimientos mensuales del

período de verano se utilizaron los registros diarios de la estación Huites comprendidos de 1942 a 1992 del Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales (IMTA, 2000). La correlación entre los escurrimientos permitirá utilizar los escurrimientos del mes anterior para mejorar el pronóstico de los escurrimientos del mes siguiente por medio de una distribución bivariada. Como distribución bivariada se utilizará la generalización de la distribución de Moran obtenida por Gómez y Cruz (2007). Moran obtuvo una distribución bivariada con marginales gamma en 1969 a partir de una distribución normal bivariada con un coeficiente de correlación  $\rho$ . La distribución de Moran es una de las primeras versiones de la distribución gamma bivariada y la generalización de Gómez y Cruz (2007), permite que tenga como marginales a cualquier distribución continua de probabilidad, razón por la cual se eligió.

La distribución bivariada que se utilizará tendrá como parámetros a las distribuciones marginales de mejor ajuste a los escurrimientos mensuales, las cuales, con sus parámetros correspondientes, se obtendrán mediante el software BestFit4.5<sup>®</sup> utilizando los criterios de Anderson-Darling y Ji-cuadrada.

La distribución gamma bivariada obtenida por Moran se basa en lo siguiente:

1. La dependencia entre variables con una distribución normal bivariada, está completamente especificada por el coeficiente de correlación  $\rho$ .

2. La función acumulada de probabilidad o función de distribución (FD) de cualquier variable con distribución univariada continua, tiene una distribución uniforme  $U(0,1)$  en el intervalo  $(0,1)$ .

3. El teorema de cambio de variable que permite obtener la distribución de una función de una variable aleatoria con una función de densidad específica (Casella, 1990).

Moran (1969) supone dos variables aleatorias  $W$  y  $Z$ , con distribución normal bivariada, y densidad:

$$f_{w,z}(w, z) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[w^2 - 2\rho wz + z^2\right]\right\} \quad (1)$$

Define a las variables aleatorias  $U$  y  $V$  como las distribuciones acumuladas de  $W$  y  $Z$ , por medio de las expresiones:

$$U = \Phi(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^w e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.1)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(Z) \quad (2.2)$$

Estas variables aleatorias  $U$  y  $V$  tienen una distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ . Posteriormente define a las variables  $X$  y  $Y$  por medio de las expresiones:

$$U = F(X, \theta_1) = \int_{-\infty}^x f(s, \theta_1) ds \quad (3.1)$$

$$V = G(Y, \theta_2) = \int_{-\infty}^y g(s, \theta_2) ds \quad (3.2)$$

Para Moran  $f(x, \theta_1)$ , y  $g(y, \theta_2)$  son las funciones de densidad de las variables gamma marginales, y  $F$  y  $G$  son las funciones de distribución correspondientes. Finalmente, por medio del teorema de cambio de variable se obtiene la función de densidad conjunta de una distribución gamma bivariada.

Con la suposición de que las densidades  $f(x, \theta_1)$  y  $g(y, \theta_2)$ , provienen de cualquier distribución, la distribución de Moran ha sido generalizada por Gómez y Cruz (2007) con la expresión:

$$h(x, y) = \frac{1}{(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\rho w)^2 - 2\rho wz + (\rho z)^2]\right\} \times f(x; \theta_1) g(y; \theta_2) \quad (4)$$

Esta expresión permite, en forma inmediata, la obtención de la densidad condicional de  $y/x$  que se denota por  $f(y/x)$ , cuyos valores esperados, para valores específicos de  $x$ , proporcionan los pronósticos propuestos en este trabajo. La densidad condicional se obtiene dividiendo (Casella, 1990) la distribución bivariada (4) por la densidad marginal.

$$f(x/y) = \frac{f(x; \theta_1)}{(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\rho w)^2 - 2\rho wz + (\rho z)^2]\right\} \times g(y; \theta_2) \quad (5)$$

El procedimiento para la obtención de pronósticos se puede describir con los siguientes pasos.

1 Obtener las distribuciones marginales de los escurrimientos mensuales consecutivos y correlacionados  $f(x, \theta_1)$  y  $g(y, \theta_2)$ , mediante algún criterio (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-

Darling,  $\chi^2$ -cuadrada).

- 2 Calcular el valor de  $\rho_0$ , el coeficiente de correlación de las variables normalizadas ( $W$  y  $Z$ ).
- 3 Calcular la densidad bivariada conjunta de la expresión (4) con la ayuda de un software estadístico (Splus, por ejemplo) o Mathematica® (Wolfram, 1998) que fue el paquete utilizado en este trabajo. Las densidades bivariadas se pueden mostrar gráficamente por medio de gráficas de contornos.
- 4 Obtener la densidad condicional de la expresión (5).
- 5 Obtener la media y los percentiles de la distribución condicional para cada escurrimiento observado en el mes anterior (valor observado de la variable  $X$ ). Los valores esperados son los pronósticos de los escurrimientos para el mes siguiente, los percentiles permiten formular

intervalos de predicción.

### Resultados y discusión

Se utilizaron Los escurrimientos registrados en la estación hidrométrica Huites (que se localiza sobre el Río Fuerte en el municipio de Choix estado de Sinaloa, figura 1) correspondientes al período de 1942-1992. Las coordenadas de esta estación son  $26^{\circ}54'15''$  latitud norte y  $108^{\circ}07'45''$  longitud oeste, posee un área de drenaje de  $26\,020\text{ km}^2$  y registra un gasto promedio anual de  $123\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$ , un gasto máximo de  $15000\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$  y un mínimo de  $1.95\text{ m}^3\text{ s}^{-1}$  (INEGI, 1995). Las series diarias se sumaron para obtener 612 escurrimientos mensuales y 51 escurrimientos anuales. La serie anual de escurrimientos se muestra en la figura 2.

Los coeficientes de correlación para las series

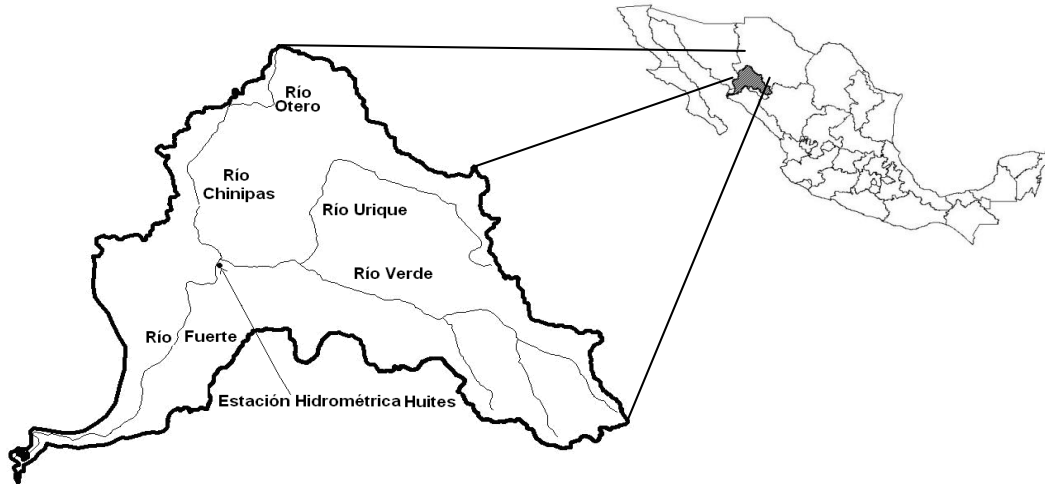


Figura 1. Cuenca del río Fuerte en el norte del estado de Sinaloa.

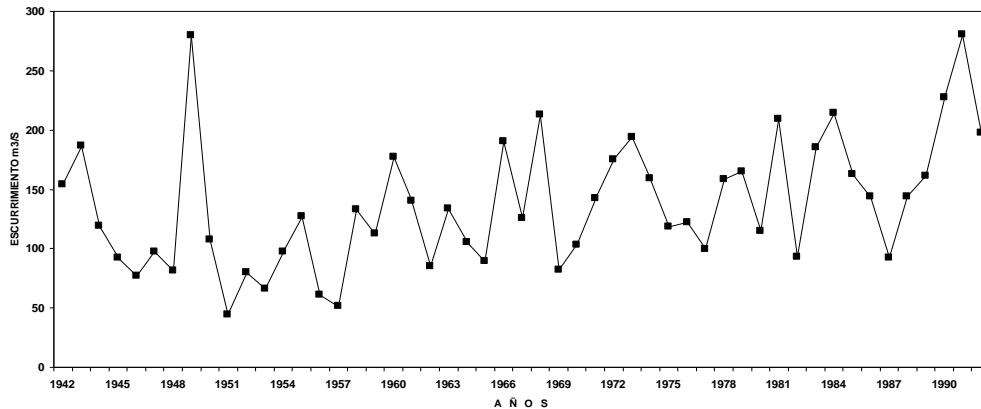


Figura 2. Escurrimientos históricos anuales del Río Fuerte Sin.

mensuales de los escurrimientos se presentan en la tabla 1. Los escurrimientos de enero a mayo (período de estiaje) están correlacionadas significativamente con valores de 0.31 a 0.71, la correlación de mayo con junio no es significativa ( $\alpha=0.05$ ), debido a que en junio inician las lluvias asociadas al Monzón Mexicano (Douglas *et al.*, 1993).

Las correlaciones de los escurrimientos de los meses de la temporada de lluvias, junio, julio, agosto, septiembre, octubre y noviembre son significativas (de un mes con el siguiente), esta característica se utilizará para pronosticar el escurrimiento de un mes con la información del mes anterior. Note que el escurrimiento de noviembre no está correlacionado con el de diciembre, debido a que en noviembre concluye el período de lluvias. El comportamiento del patrón de escurrimientos coincide, obviamente, con la distribución de lluvias descrita en los estudios que se han realizado en la Región Administrativa Pacífico Norte (Douglas y Englehart, 1995), que definen dos temporadas: la de lluvias, de junio a noviembre y la de estiaje, de diciembre a mayo.

Las correlaciones de los escurrimientos de la temporada de lluvias (junio-noviembre) se

utilizarán para ajustar distribuciones bivariadas para meses contiguos y obtener la distribución condicional de los escurrimientos de un mes con los escurrimientos observados en el mes anterior. Para ajustar la distribución bivariada generalizada de Moran, en la primer etapa, se obtuvieron las distribuciones de probabilidad univariada de mejor ajuste a los escurrimientos mensuales. La tabla 2 presenta las distribuciones de mejor ajuste para cada mes. En la segunda etapa, se calculó la distribución generalizada de Moran descrita en la ecuación 4. Las figuras 3 y 4, presentan las gráficas de contorno de las funciones de bivariadas de densidad para los escurrimientos de junio-julio y julio-agosto. Las gráficas de contorno muestran las líneas de igual densidad para las variables aleatorias de los ejes X y Y. Para ilustrar la dependencia entre las variables se presentan dos gráficas, a la izquierda se presenta la función de densidad con el coeficiente de correlación observado y a la derecha la función de densidad con un coeficiente de correlación igual a cero.

Los valores esperados de las distribuciones condicionales (obtenidos por integración numérica, condicionados a los escurrimientos del mes anterior) se utilizan como pronósticos de los

**Tabla 1. Coeficientes de correlación de los escurrimientos mensuales.**

Meses	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov
Feb	0.3121										
	0.0262										
Mar	0.085	0.452									
	0.552	0.001									
Abr	0.303	0.623	0.719								
	0.031	0	0								
May	0.265	0.508	0.237	0.665							
	0.06	0	0.093	0							
Jun	-0.02	-0.008	-0.05	0.087	0.248						
	0.879	0.955	0.731	0.546	0.08						
Jul	0.079	-0.075	-0.09	0.092	0.081	0.378					
	0.579	0.6	0.539	0.523	0.574	0.006					
Ago	-0.01	0.074	0.006	0.142	0.075	0.177	0.351				
	0.932	0.606	0.967	0.32	0.601	0.214	0.011				
Sep	0.036	-0.063	0.104	0.148	0.059	-0.034	-0.01	0.31			
	0.801	0.663	0.467	0.3	0.682	0.812	0.942	0.027			
Oct	-0.04	-0.253	0.085	-0.001	0.013	0.123	-0.033	0.021	0.426		
	0.766	0.073	0.551	0.994	0.93	0.389	0.817	0.885	0.002		
Nov	-0.05	-0.088	0.109	0.066	0.076	0.129	0.069	-0.01	0.338	0.417	
	0.746	0.537	0.447	0.647	0.595	0.368	0.631	0.944	0.015	0.002	
Dic	-0.1	-0.092	-0	0.107	0.131	0.391	0.164	0.03	0.074	0.245	0.04
	0.509	0.521	0.978	0.453	0.361	0.005	0.249	0.834	0.605	0.084	0.779

<sup>1</sup>Coefficiente de correlación de Pearson

<sup>2</sup>Significancia del coeficiente de correlación

escurrimientos mensuales. La tabla 3, por limitaciones de espacio, muestra únicamente los intervalos de predicción del 95% para los escurrimientos del mes de julio (el límite inferior corresponde al percentil 2.5 y el límite superior al percentil 97.5 de la distribución condicional), la amplitud de estos intervalos se explica por la gran variabilidad de los escurrimientos. La tabla 3

presenta también los pronósticos puntuales de los escurrimientos del mes de julio para ciertos escurrimientos de junio, los pronósticos puntuales presentados son los estimadores de mínimos cuadrados. Los estimadores de regresión lineal simple serían los estimadores de mínimos cuadrados si los escurrimientos tuvieran una distribución normal, sin embargo, como la

**Tabla 2. Distribuciones de mejor ajuste para los escurrimientos mensuales con el criterio de Ji-cuadrada.**

Mes	Distribución de probabilidad
Junio	Exponencial ( $\beta = 25.1054$ ) $f(x) = \frac{1}{25.1054} \text{Exp}[-x/25.1054]$
Julio	Gamma ( $\alpha = 4.4306, \beta = 58.789$ ) $f(x) = \frac{1}{58.789 \Gamma(4.4306)} \left(\frac{x}{58.789}\right)^{3.4306} \text{Exp}[-x/58.789]$
Agosto	Gauss Invertida ( $\mu = 422.42, \alpha = 1800.39$ ) $f(x) = \sqrt{\frac{1800.39}{2\pi x^3}} \text{Exp}\left[\frac{-1800.39(x - 422.42)^2}{2 \times 422.42^2 x}\right]$
Septiembre	Lognormal ( $\mu = 306.43, \sigma = 224.32$ ) $f(x) = \frac{1}{224.32 \sqrt{2\pi} x} \text{Exp}\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - 306.43}{224.32}\right)^2\right]$

$f(x)$  función de densidad para  $x > 0$ ,  $f(x) = 0$  para  $x \leq 0$

$\beta$ : Parámetro de escala,  $\alpha$ : Parámetro de forma,  $\mu$ : Media,  $\sigma$ : Desviación estándar

**Tabla 3. Pronósticos e intervalos de predicción para los escurrimientos de julio para ciertos escurrimientos observados en el mes de junio.**

Escurrimiento Observado Junio ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )	Límite inferior del 95% ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )	Escurrimiento Pronosticado Julio ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )	Límite superior del 95% ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
10	76	237	491
20	88	263	533
30	97	282	563
40	105	297	588
50	112	311	610
60	118	323	629
70	124	334	647
80	129	345	663
90	135	355	679
100	140	365	694
110	144	374	708
120	150	383	721
130	154	392	734
140	159	400	747
150	163	408	759
160	168	416	771
170	172	424	782
180	176	431	794
190	180	439	805
200	185	446	815

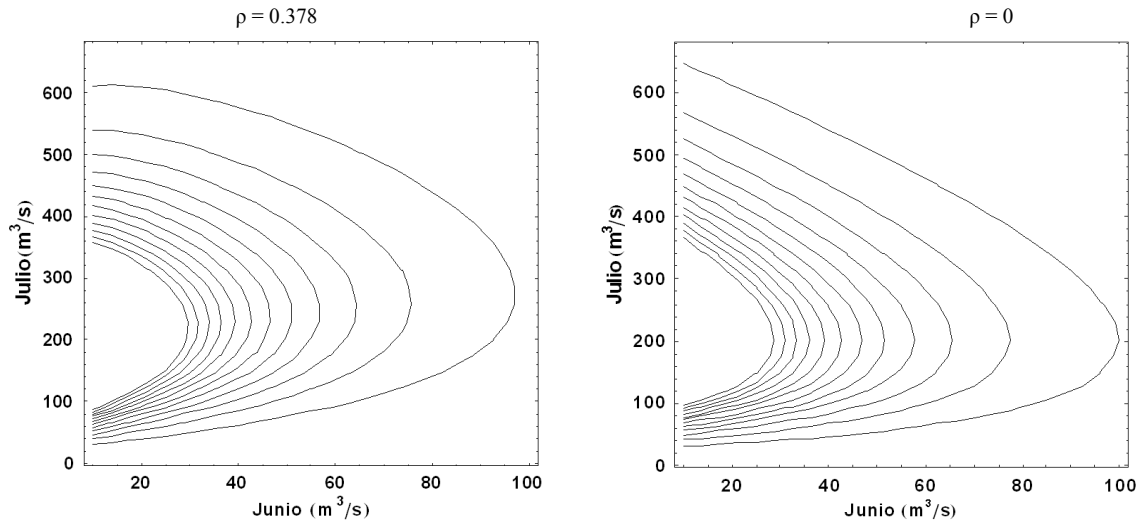


Figura 3. Gráfica de contornos o líneas de igual densidad de la distribución bivariada para los escurrimientos de junio y julio.

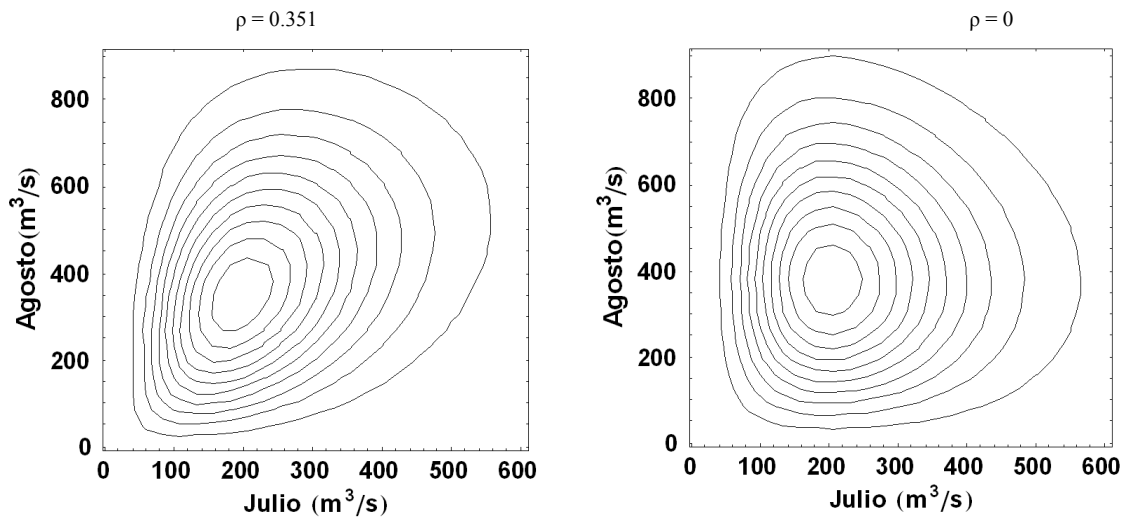


Figura 4. Gráfica de contornos o líneas de igual densidad de la distribución bivariada para los escurrimientos de julio y Agosto.

tabla 2 muestra, los escurrimientos no se ajustan a una distribución normal. Las figuras 5 y 6 muestran los escurrimientos observados, las medias condicionales (propuestas como pronósticos) y la línea de regresión lineal simple.

Las gráficas muestran que existe gran similitud entre las medias condicionales y la línea de regresión lineal simple, excepto en los límites superior e inferior. Es necesario recalcar, sin embargo, que no se justifica el uso de la línea de regresión lineal simple porque los escurrimientos no siguen una distribución normal.

### Conclusiones

En este trabajo se estudian los escurrimientos mensuales del río Fuerte registrados en la estación hidrométrica Huites en el Norte del estado de Sinaloa. El registro de datos diarios comprende el período de 1942 a 1992, en el cual se tiene un gasto promedio anual de  $123 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , un gasto máximo de

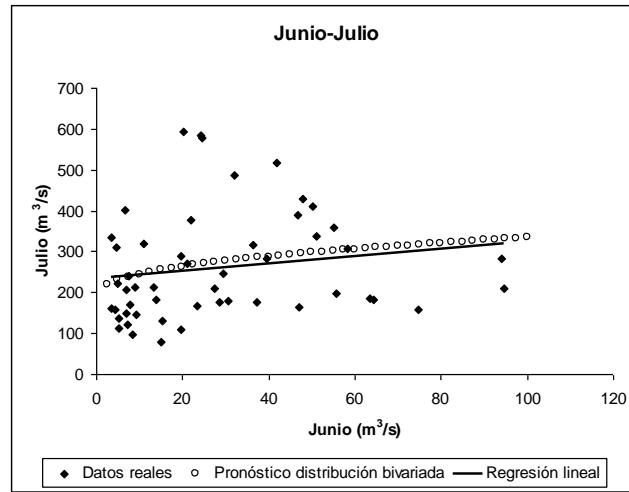


Figura 5. Pronósticos para los escurrimientos de Julio cuando se conocen los de Junio.

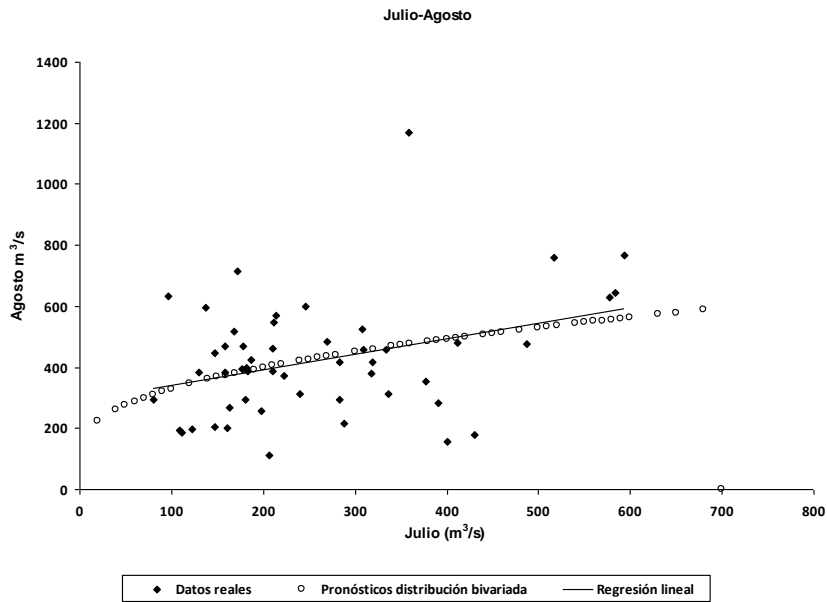


Figura 6. Pronósticos para los escurrimientos de Agosto cuando se conocen los de Julio.

15000  $\text{m}^3\text{s}^{-1}$  y un mínimo de 1.95  $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ , de los escurrimientos diarios se obtuvieron 612 registros mensuales que fueron utilizados en los análisis. Las estadísticas descriptivas de los escurrimientos muestran que los escurrimientos mensuales de junio a noviembre están significativamente correlacionados. Los escurrimientos se pueden separar en dos grupos, los correspondientes a la temporada de estiaje, de enero a mayo,

correlacionados entre sí y los correspondientes a la temporada de lluvias de verano, de junio a octubre, también correlacionados entre sí. Las correlaciones de los escurrimientos de los meses adyacentes en la temporada de lluvias, se utilizaron para obtener pronósticos de los escurrimientos de un mes, utilizando el escurrimiento del mes anterior por medio de distribuciones bivariadas (se utilizaron



distribuciones bivariadas de la familia generalizada de Moran). Los valores esperados y los percentiles de las distribuciones condicionales, obtenidas por integración numérica, se utilizaron como pronósticos puntuales y para obtener intervalos de predicción de los escurrimientos respectivamente. Se presentan las gráficas de contorno de las distribuciones bivariadas, y dos curvas de pronósticos, la curva formada por las medias condicionales y la obtenida por medio de una regresión lineal simple. Aunque estas curvas de pronóstico, en las figuras 5 y 6 parecen similares, se recalca que la media de la distribución condicional proporciona los pronósticos de mínimos cuadrados y que los pronósticos obtenidos por regresión lineal no son recomendables porque las distribuciones de los escurrimientos no son normales. Las gráficas muestran además que existen diferencias marcadas en los pronósticos en los límites superior e inferior de los escurrimientos observados. La tabla 3 presenta los pronósticos de los escurrimientos de julio para algunos escurrimientos observados en el mes de junio.

## Bibliografía

- Casella, G. y Berger, R.L., 1990. Statistical Inference. *Duxbury Press*. Belmont USA. 650 pp.
- Choulakian, V., El-Jabi, N. y Moussi, J., 1990. On the distribution of flood volume in partial duration series analysis of flood phenomena. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*. 4: 217-226.
- Douglas, A.V. y Englehart, P.J., 1995. Diagnostic studies of the Mexican Monsoon. *Proceeding of the Nineteenth Annual Climate Diagnostic Workshop*. NOAA. USA.
- Douglas, W.M., Maddox, R.A. y Howard, K., 1993. The Mexican Monsoon. *American Meteorological Society*. 6(8): 1665-1677.
- Escalante\_Sandoval, C.A., 2005. Análisis de eficiencia de la distribución Bi\_Gumbel. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*. 1: 13-17.
- Farlie, D.J.G., 1960. The performance of some correlations coefficient for a general bivariate distribution. *Biometrika*. 47(3): 307-323.
- Gómez-Salazar, R. y Cruz-Medina, I.R., 2007. Una familia de distribuciones bivariadas y sus aplicaciones en Hidrología. *Agrociencia*. 41: 903-912.
- Helsel, D.R. y Hirsch, R.M., 1992. Statistical methods in water resources. *Elsevier Science Publishing Company*, New York. USA. 420 pp.
- Hirsch, R.M. y Slack, J.R., 1984. A nonparametric trend test for seasonal data with serial dependence. *Water resources Research*. 20: 727-732.
- IMTA, (Instituto Mexicano de Tecnología del Agua), 2000. Banco Nacional de Datos de Aguas Superficiales, México. Disco 1.
- INEGI, (Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática), 1995. Estudio hidrológico del estado de Sinaloa. México, 94 pp.
- Kelly, S.K. y Krzysztofowicz, R., 1997. A bivariate meta-Gaussian density for use in hydrology. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*. 11: 17-31.
- Kibble, W.F., 1941. A two variate gamma-type distribution. *Sankhya*. 5: 137-150.
- Knight, W.D. y Shamseldin A.Y., 2006. River basin modeling for flood risk mitigation. *Taylor & Francis group*. London, UK. 607 pp.
- Moran, P.A.P., 1969. Statistical inference with bivariate gamma distributions. *Biometrika*. 56: 627-634.
- Rosbjerg, D., 1987. On the annual maximum distribution in dependent partial duration series. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*. 1: 3-16.
- Sheng, Y., Pilon, P. y Cavadias G., 2002. Power of the Mann-Kendall and Spearman's rho tests for detecting monotonic trends in hydrological series. *Journal of Hydrology*. 259(4): 254-271.
- Singh, K. y Singh, V.P., 1991. Derivation de bivariate probability density functions with exponential marginals. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*. 5: 55-68.
- Warren, D. 1992. A multivariate gamma distribution arising from Markov model. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*. 6: 183-190.
- Wolfram, S., 1998. The Mathematica book. Fourth ed. *Cambridge University Press*. 1470 pp.
- Yue, S., Quarda, T.B.M.J. y Bobée, B., 2001. A review of bivariate gamma distributions for hydrological applications. *Journal of Hydrology*. 246: 1-18.